鲁棒控制理论

Robust Control Theory

史忠科 吴方向 王蓓 阮洪宁 著

国防工业出版社

责任编辑　朱秀芬



ISBN 7-118-03029-5/TP·779
定价:24.00 元

鲁棒控制理论

Robust Control Theory

史忠科　吴方向
王　蓓　阮洪宁　著

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

鲁棒控制理论/史忠科等著.—北京:国防工业出版社.2003.1
ISBN 7-118-03029-5

Ⅰ.鲁... Ⅱ.史... Ⅲ.鲁棒控制-控制系统理论
Ⅳ.TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 089242 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码 100044)
北京奥隆印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 850×1168 1/32 印张 8⅝ 220 千字
2003 年 1 月第 1 版 2003 年 1 月北京第 1 次印刷
印数:1—2500 册 定价:24.00 元

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分，又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技和武器装备建设事业的发展，加强社会主义物质文明和精神文明建设，培养优秀科技人才，确保国防科技优秀图书的出版，原国防科工委于1988年初决定每年拨出专款，设立国防科技图书出版基金，成立评审委员会，扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是：

1. 在国防科学技术领域中，学术水平高，内容有创见，在学科上居领先地位的基础科学理论图书；在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2. 学术思想新颖，内容具体、实用，对国防科技和武器装备发展具有较大推动作用的专著；密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的高新技术内容的专著。

3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值，密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的新工艺、新材料内容的专著。

4. 填补目前我国科技领域空白并具有军事应用前景的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

国防科技图书出版基金评审委员会在总装备部的领导下开展工作，负责掌握出版基金的使用方向，评审受理的图书选题，决定资助的图书选题和资助金额，以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书，由总装备部国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承担着记载和弘扬这些成就,积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下,原国防科工委率先设立出版基金,扶持出版科技图书,这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物,是对出版工作的一项改革。因而,评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进,这样,才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技和武器装备建设战线广大科技工作者、专家、教授,以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来,为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗!

国防科技图书出版基金
评审委员会

国防科技图书出版基金
第三届评审委员会组成人员

前　言

随着现代科学技术和生产技术的发展，人们对控制系统的性能要求越来越高，基于数学模型的传统控制理论面临着新的挑战，遇到了难以克服的矛盾。由于数学模型的近似性和不确定性，非线性对系统的效应、测量的不准确性、控制系统本身的参数变化等，人们在设计控制系统时，只能在近似和简化的基础上进行。但系统是否具有良好的动态性能并对模型、初值、测量噪声等不确定因素具有稳健性？人们很难确定。鲁棒控制理论是处理以上各种不确定性问题的有力工具，H_∞鲁棒控制理论和 μ 分析理论则是当前控制工程中最活跃的研究领域之一，近 20 多年来一直倍受控制研究工作者的青睐。

本书第 1 篇是在状态空间描述下，系统地总结了连续时间线性和非线性系统、离散时间线性和非线性系统的 H_∞鲁棒控制理论。

由于在鲁棒性控制器设计的方法中，μ 理论有其独特的优点，体现在理论上无保守性。因此，本书第 2 篇对连续时间线性系统的 μ 分析理论作了系统介绍。

本书还介绍了作者近年在区间系统、时滞系统的 H_∞鲁棒控制理论，递阶 H_∞鲁棒控制理论，μ 控制器模型降阶设计方法等方面的研究成果。并且，重点讨论了在干扰情况下飞机起飞和着陆的鲁棒控制问题。

本书共分 12 章。第 1 章概述了鲁棒控制的有关概念；第 2 章介绍了基本 H_∞优化理论；第 3 章介绍了离散时间系统的 H_∞理论；第 4 章介绍了递阶/分散 H_∞优化方法；第 5 章介绍了 H_∞优化方法的性质及其实现问题；第 6 章讨论了 H_∞优化算法在飞行

控制中的应用问题;第 7 章介绍了时滞系统的鲁棒控制;第 8 章介绍了区间系统的鲁棒控制;第 9 章介绍了 μ 理论的基本概念;第 10 章介绍了 μ 分析与 μ 综合;第 11 章讨论了纵向飞行控制系统 μ 综合方法;第 12 章介绍了 μ 控制器的平衡降阶方法。本书第 1 章~第 6 章由王蓓、张勇、史忠科编写;第 7、8 章由吴方向编写;第 9 章~第 12 章由阮洪宁、史忠科编写;全书由史忠科、吴方向统稿。

由于作者的水平和时间的限制,书中难免有这样那样的问题及符号错误,敬请读者给予批评指正。

作　者

目　　录

第 1 篇　H_∞控制理论

第2篇 μ 控制理论

Contents

Piece1 H_∞ control theory

Piece2 μ-control theory

第1篇　H_∞控制理论

第1章　概　　述

1.1　引　　言

随着科学技术的飞速发展，对控制系统的性能要求越来越高。就拿一架飞机来说，希望在它的动态性能不明确的情况下，能保证它有良好的运动。更进一步地说，飞机通常要求在开环临界稳定点附近工作，这样就要求飞行控制系统能良好地处理所谓模型不确定性问题。而在实际飞行控制系统设计中还要考虑以下问题：

(1) 在已经建立起数学模型的飞机参数发生变化或存在结构不确定时，飞行控制系统应该具有小的灵敏度响应。

(2) 由于控制器频带比较宽，使得飞机性能受飞机结构和执行机构动态性能变化的影响比较大。

(3) 反馈控制器的设计虽然对飞行员指令会得到较理想的响应，但是对于外部干扰的响应可能会是破坏性的。

(4) 执行部件与控制元件存在制造容差，系统运行过程中也存在老化、磨损及环境和运行条件恶化等现象。

(5) 在实际工程问题中，通常对数学模型要人为地进行简化，去掉一些复杂的因素。

因此，一个合理的设计应该考虑到上述各种因素的影响，从而就会用到与控制有关的各种理论知识。比如对于系统中出现的随机噪声，利用滤波的方法处理；在系统结构参数不明确的情况下进

行系统辨识,建立系统的数学模型;为了使控制系统具有判断故障和处理故障的能力,可以进行故障诊断和容错控制;对于结构或非结构不确定性,就要考虑到鲁棒设计方法。

所谓鲁棒性是指控制对象在一定范围内变化时,它能在某种程度上保持系统的稳定性与动态性能的能力。在单变量控制系统中,系统的鲁棒性可以从系统的开环传递函数的幅频和相频特性中可靠地估计出来,例如稳定裕度的概念就可以反映系统抗模型摄动的能力。对于多变量控制系统,由于系统中有众多不同的输入输出量操纵,使幅值与相位的意义变得模糊了,因此在多变量控制系统中照搬单变量系统的结果是不行的,这样就需引入状态空间法来处理多变量情况。

1.2 鲁棒性的基本概念

无论是古典控制理论还是现代控制理论,在被控对象具有精确数学模型的基础上,都已形成了一整套严密而完整的理论体系。它们都是从一个系统的数学模型出发,设计出一个控制器,使该系统满足某种特定的性能指标要求,如阻尼、超调量、调节时间、跟随特性和频率响应等等。但存在的问题是,一旦设计完成,若用一个不精确的数学模型作为依据,那么所得到的控制器是否能使系统仍然保持满意的结果?换句话说,基于不精确数学模型得到的控制器可能会使系统行为不符合要求,甚至与用精确数学模型设计的行为完全不同。由此引出了如何设计一个合理的控制器,当存在不确定性因素的情况下,使系统性能仍保持良好状态。这就提出了“鲁棒性”概念。

1.2.1 不确定性与鲁棒性

鲁棒概念可以描述为:假定对象的数学模型属于一集合 $\mathscr{P}$,考察反馈系统的某些特性,如内部稳定性,给定一控制器 K,如果集合 $\mathscr{P}$ 中的每一个对象都能保持这种特性成立,则称该控制器对此

特性是鲁棒的。因此谈及鲁棒性必有一个控制器、一个对象的集合和某些系统特性。

全面理解"对象的数学模型属于一集合"是正确理解"鲁棒"的基础。它的本质在于阐明对象的不确定性引起的对数学模型表达的特性。下面对不确定性及其描述进行说明。

1. 对象的不确定性

由于不确定性的存在,没有任何一个物理系统可以用准确的数学模型来表达。本书中对象模型的基本形式是

$$y = (P + \Delta)u + n \tag{1.1}$$

这里 y 是输出,u 是输入,P 是标称对象的传递函数,模型的不确定性以两种形式出现:

n—— 未知噪声或干扰;

Δ—— 未知对象的摄动。

假定 n 和 Δ 各属于某一个集合,于是每一个输入 u 都会产生一个输出集合,这个集合就是由 $(P + \Delta)u + n$ 构成的集合。对于一个输入能够产生一个输出集合的模型称为不确定性的。由此可见,对象的模型是属于一个集合的。

2. 不确定性模型的描述形式

用集合 $\mathscr{P}$ 代表对象的模型,它可以分为结构化和非结构化两种形式。结构化集合是由于不定参数的变化形成的,所以在以往的控制理论中,传递函数 $P(s)$ 的表达式中只有一个自变量 s,而在研究有关模型不确定性问题时,自变量还应包括不确定参数向量 $\boldsymbol{q}$,即 $P(s,\boldsymbol{q})$。

以对象模型 $\dfrac{1}{s^2 + as + 1}$ 为例,假定仅知常数 a 在某个区间 $[a_{\min}, a_{\max}]$ 内,那么这个对象属于结构化集合

$$\mathscr{P} = \left\{\frac{1}{s^2 + as + 1} : a_{\min} \leqslant a \leqslant a_{\max}\right\}$$

此例为只有一个参数时结构化集合的描述形式。当不确定参数是 l 维实向量时,即当 $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_l)$ 或 $\boldsymbol{q} \in R^l$ 时,若用分

式表达对象的模型,则为

$$P(s,\boldsymbol{q})=\frac{N(s,\boldsymbol{q})}{D(s,\boldsymbol{q})}=\frac{\sum_{i=0}^{m}a_i(\boldsymbol{q})s^i}{\sum_{i=0}^{m}b_i(\boldsymbol{q})s^i}$$

假定已知第 i 个参数分量所在的区间为$[q_i^-,q_i^+]$,那么这个对象的结构化集合为

$$\mathscr{P}=\{P(s,\boldsymbol{q});\boldsymbol{q}\in R^l,q_i^-\leqslant q_i\leqslant q_i^+,i=1,2,\cdots,l\}$$

对象的非结构化不确定性是由未建模动态引起的。这种由于建模中简化的误差和被控制对象本身的不确定性造成的实际被控对象与所建模型之间的差异称为系统的摄动量。目前研究得最多最普遍的非结构模型摄动是附加摄动和乘积摄动。这两种摄动形式的描述将在 1.3 节的多变量控制系统的鲁棒性分析中加以介绍。

1.2.2 鲁棒稳定性(RS)

对于我们来说,两个最重要的鲁棒概念是本小节所介绍的鲁棒稳定性和下一小节介绍的鲁棒性能。它们是进行鲁棒性分析和设计的核心内容。

定义 1.1 设对象的传递函数属于一集合 $\mathscr{P}$,一个控制器 K 如果对集合 $\mathscr{P}$中的每个对象都能保证内部稳定,则称它为 RS 的。

假定控制器使标称反馈系统达到内部稳定,引进灵敏度函数

$$S=\frac{1}{1+PK}=\frac{1}{1+L} \tag{1.2}$$

式中 $L=PK$ (回路开环传递函数)。

补灵敏度函数为

$$T=1-S=\frac{L}{1+L}=\frac{PK}{1+PK} \tag{1.3}$$

反馈系统框图如图 1.1 所示。

定理 1.1 (乘积不确定模型)控制器 K 能保证鲁棒稳定性的

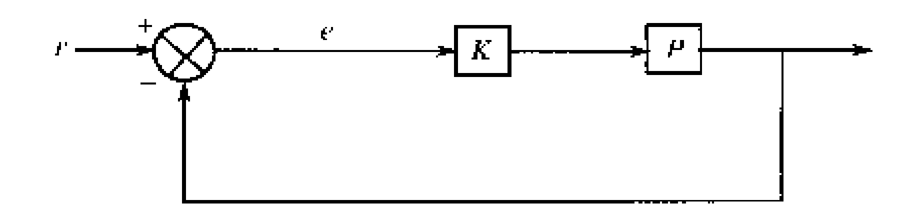


图 1.1　反馈系统框图

r— 参考输入；e— 跟踪误差。

充要条件是

$$\| W_2 T \|_\infty < 1 \tag{1.4}$$

式中 W_2 为一权函数。

这个定理的证明将在第 2 章中 H_∞ 优化方法的介绍中给出。条件是

$$\| W_2 T \|_\infty < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{W_2(\mathrm{j}\omega)L(\mathrm{j}\omega)}{1 + L(\mathrm{j}\omega)} \right| < 1, \qquad \forall \omega$$

$$\Leftrightarrow | W_2(\mathrm{j}\omega)L(\mathrm{j}\omega) | < | 1 + L(\mathrm{j}\omega) |, \forall \omega$$

这表明在每一个频率下，临界点都位于以 $L(\mathrm{j}\omega)$ 为圆心，以 $| W_2(\mathrm{j}\omega)L(\mathrm{j}\omega) |$ 为半径的圆外，如图 1.2 所示。

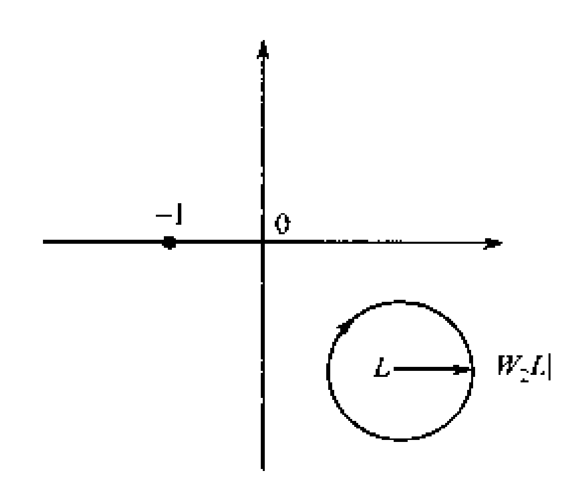


图 1.2　鲁棒稳定性

条件 $\| W_2 T \|_\infty < 1$ 可以由下面的简单方法得到。摄动系统框图如图 1.3 所示。

从 Δ 的输出到 Δ 的输入的传递函数等于 $-W_2 T$，这样可将图 1.3 化简为图 1.4。

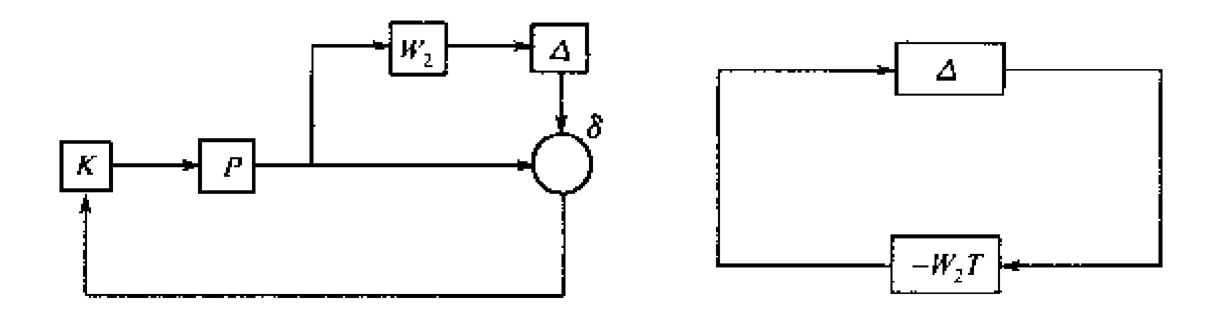


图 1.3　摄动后的反馈系统　　　　图 1.4　图 1.3 简化后的系统

图中最大回路增益等于 $\| -\Delta W_2 T \|_\infty$。对于所有容许的 Δ，$\| -\Delta W_2 T \|_\infty$ 都小于 1 的充要条件是小增益条件 $\| -W_2 T \|_\infty < 1$ 成立。

1.2.3　鲁棒性能(RP)

定义 1.2　假定对象的传递函数属于集合 $\mathscr{P}$，鲁棒性能是指集合中的所有对象都满足内部稳定性和一种特定的性能。

首先我们要知道标称对象的性能条件。从前面的介绍我们知道，从参考输入 r 到跟踪误差 e 的传递函数是灵敏度函数 $S = \dfrac{1}{1+PK}$，补灵敏度函数为 $T = \dfrac{PK}{1+PK}$。因此有 $S = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}P} \cdot \dfrac{P}{T}$，所以 S 是闭环传递函数 T 对 P 的无限小的摄动的灵敏度。

在跟踪控制中，若希望跟踪误差 e 的幅值小于给定的某一 ε，则性能指标可以表示为

$$\| S \|_\infty < \varepsilon$$

定义权函数 $W_1(S) = \dfrac{1}{\varepsilon}$，则有 $\| W_1 S \|_\infty < 1$。

现在再来看 RP 的充要条件。当一个标称对象是内部稳定的，那么标称的性能条件是 $\| W_1 S \|_\infty < 1$，并且 RS 条件是 $\| W_2 T \|_\infty < 1$。如果 P 取摄动为 $(1+\Delta W_2)P$，那么 S 的摄动为

$$\frac{1}{1+(1+\Delta W_2)L} = \frac{S}{1+\Delta W_2 T}$$

显然 RP 条件是

$$\| W_2 T \|_\infty < 1 \quad 且 \quad \| W_1 \frac{S}{1+\Delta W_2 T} \|_\infty < 1, \qquad \forall \delta \tag{1.5}$$

这里 Δ 满足 $\|\Delta\|_\infty < 1$。

定理 1.2　RP 的充分必要条件为

$$\| \, |W_1 S| + |W_2 T| \, \|_\infty < 1 \tag{1.6}$$

式(1.6) 的图解形式如图 1.5 所示。

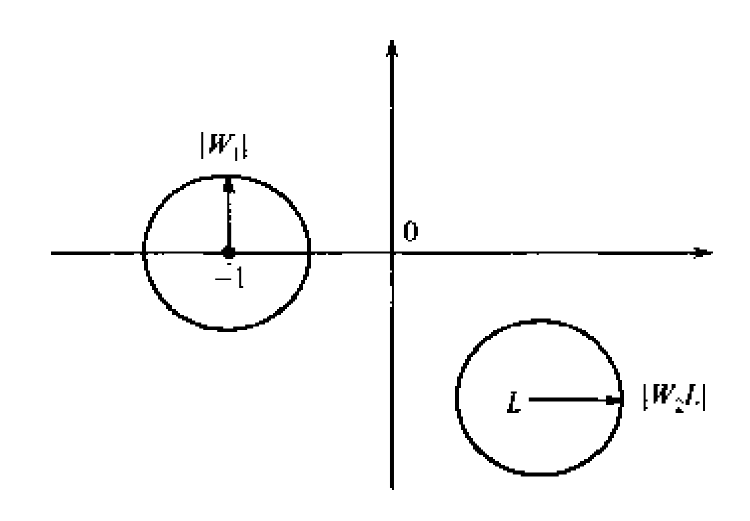


图 1.5　图示 RP 的条件

对每一个频率 ω，构造两个封闭圆，一个以 -1 为圆心，以 $|W_1(j\omega)|$ 为半径；另一个以 $L(j\omega)$ 为圆心，以 $|W_2(j\omega)L(j\omega)|$ 为半径。式(1.6) 成立当且仅当在每一频率 ω 处这两个圆都是分离的。

1.3　多变量控制系统的鲁棒性分析

多变量控制系统是实际中最常见到的系统，所以本书主要对多变量控制系统进行鲁棒性分析，并结合国产某歼击机纵向飞行控制系统进行分析和说明。

1.3.1　多变量控制系统的描述

系统的描述，即对实际的控制系统建立数学模型，是对控制系

统进行分析与设计的基础。因而，首先对系统的线性描述方法给予介绍。在多变量控制系统理论中，对于系统的线性描述方法一般分为内部描述与外部描述两种形式。内部描述分为状态空间描述和多项式矩阵描述两种，外部描述为传递函数矩阵描述。这里将给予逐一介绍。

1. 多变量控制系统的外部描述

多变量控制系统的一般结构如图 1.6 所示。

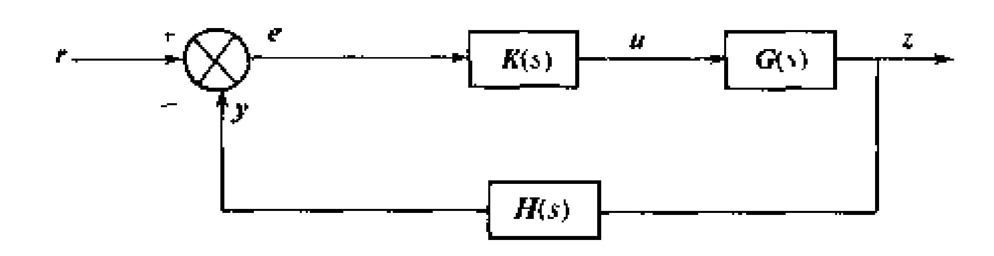


图 1.6　多变量控制系统的一般结构

其中 $\boldsymbol{r}$ 是 m 维参考输入向量，$\boldsymbol{e}$ 是 m 维误差向量，$\boldsymbol{z}$ 是 l 维输出向量，$\boldsymbol{G}(s)$ 是 $l \times m$ 维受控对象的传递函数矩阵，$\boldsymbol{K}(s)$ 是 $m \times m$ 维补偿传递函数矩阵，$\boldsymbol{H}(s)$ 是 $m \times l$ 维反馈传递函数矩阵。

系统的传递函数矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(s)$，反应了系统在零初始条件下，输入向量的拉氏变换 $\boldsymbol{r}(s)$ 与输出向量的拉氏变换 $\boldsymbol{z}(s)$ 之间的映射关系。一般表示为

$$\boldsymbol{z}(s) = \boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{r}(s) \tag{1.7}$$

对于一个线性系统来说，$\boldsymbol{\Phi}(s)$ 中的元素 $\Phi_{ij}(s)$ 是两个多项式之比，它表示第 i 个输出 $\boldsymbol{z}_i$ 与第 j 个输入 $\boldsymbol{r}_j$ 之间的传递函数。

对于图 1.6 所示的系统，其传递函数矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(s)$ 为

$$\boldsymbol{\Phi}(s) = [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{K}(s)\boldsymbol{H}(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{K}(s) \tag{1.8}$$

$\boldsymbol{\Phi}(s)$ 也可写成

$$\boldsymbol{\Phi}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{K}(s)[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{K}(s)]^{-1} \tag{1.9}$$

或

$$\boldsymbol{\Phi}(s) = [(\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{K}(s))^{-1} + \boldsymbol{H}(s)]^{-1} \tag{1.10}$$

式(1.8)、式(1.9) 和式(1.10) 所描述的 $\boldsymbol{\Phi}(s)$ 是等价的。

2. 多变量控制系统的内部描述

(1) 状态空间描述

系统的状态空间描述是指用一阶微分方程组和代数方程组来描述控制系统。它们表示了系统的输入、输出和状态变量及其一阶导数之间的关系。系统的状态空间描述反映了系统内部的性质。例如系统的各状态变量之间是如何相互作用的，系统的输入向量是如何作用于状态变量的，等等。

对于图 1.6 所示系统，其前向通道为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_s = \boldsymbol{A}_s\boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{B}_s\boldsymbol{e} \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}_s\boldsymbol{x}_s \tag{1.12}$$

反馈通道为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_c = \boldsymbol{A}_c\boldsymbol{x}_c + \boldsymbol{B}_c\boldsymbol{z} \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{C}_c\boldsymbol{x}_c + \boldsymbol{D}_c\boldsymbol{z}) \tag{1.14}$$

且

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{y} \tag{1.15}$$

则此系统的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_s \\ \dot{\boldsymbol{x}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_s + \boldsymbol{B}_s\boldsymbol{D}_c\boldsymbol{C}_s & \boldsymbol{B}_s\boldsymbol{C}_c \\ \boldsymbol{B}_c\boldsymbol{C}_s & \boldsymbol{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_s \\ \boldsymbol{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_s \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{r} \tag{1.16}$$

$$\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{C}_s \quad 0] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_s \\ \boldsymbol{x}_c \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

依据此系统的状态空间描述，其状态矩阵的特征值分布可以反映闭环系统的稳定性。

(2) 系统的多项式矩阵描述

多项式矩阵描述方法介于传递函数矩阵与状态空间描述方法之间，是近 20 多年来发展起来的方法。对于图 1.6 所示系统，若系统的输入 $\boldsymbol{r}$ 对输出 $\boldsymbol{z}$ 的动态特性由方程

$$\boldsymbol{P}(D)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}(D)\boldsymbol{r} \tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}(D)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{W}(D)\boldsymbol{r} \tag{1.19}$$

所给出，式中 $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 为微分算子。则式(1.18) 和式(1.19) 称为系统的多项式矩阵描述，矩阵 $\boldsymbol{P}(D)$ 称为系统的特征矩阵。

式(1.18) 和式(1.19) 又可写成

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}(D) & -\boldsymbol{Q}(D) \\ \boldsymbol{T}(D) & \boldsymbol{W}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

令

$$\boldsymbol{S}(D) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}(D) & -\boldsymbol{Q}(D) \\ \boldsymbol{T}(D) & \boldsymbol{W}(D) \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

则 $\boldsymbol{S}(D)$ 称为系统的系统矩阵。

设系统的初值皆为零,对式(1.18) 和式(1.19) 取拉氏变换得

$$\boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{Q}(s)\boldsymbol{r}(s) \tag{1.22}$$

$$\boldsymbol{z}(s) = \boldsymbol{T}(s)\boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{W}(s)\boldsymbol{r}(s) \tag{1.23}$$

也即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}(s) & -\boldsymbol{Q}(s) \\ \boldsymbol{T}(s) & \boldsymbol{W}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(s) \\ \boldsymbol{r}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{z}(s) \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

由式(1.22) 和式(1.23) 可得出系统的传递函数矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(s) = \boldsymbol{T}(s)\boldsymbol{P}^{-1}(s)\boldsymbol{Q}(s) + \boldsymbol{W}(s) \tag{1.25}$$

系统(1.22) 和(1.23) 的描述形式以及(1.24) 的描述形式也称为系统的多项式矩阵描述。可见,系统由 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{W}$ 四个矩阵来决定,因而系统也简记为$\{\boldsymbol{P}(s),\boldsymbol{Q}(s),\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{W}(s)\}$。

系统的状态空间描述与系统的多项式矩阵描述,其不同点是多项式矩阵描述是高阶微分方程,而状态方程是一阶微分方程,而系统的状态空间描述可以看作是多项式矩阵描述的一种特殊形式。

1.3.2 控制系统的摄动形式

在系统分析与设计中,首要的任务是获取对象的数学模型。然而实际的被控对象与所建立的数学模型之间总是存在着差异。一方面是由于建模中简化引起的误差,另一方面是被控对象本身具有不确定性。我们把这些差异称为系统的摄动量。不同的系统具有不同的摄动形式,它取决于两方面的因素,一是对实际系统的了解程度;二是对摄动进行处理时要比较方便。当前研究得最普遍的是两种非结构模型摄动 —— 附加摄动与相乘摄动。

1. 附加摄动

附加摄动的结构图如图1.7所示。图中 $G(s)$ 是被控对象的模型，$\Delta G(s)$ 表示了附加形式的不确定性。对象摄动后的传递函数矩阵为

$$G'_r(s) = G(s) + \Delta G(s) \tag{1.26}$$

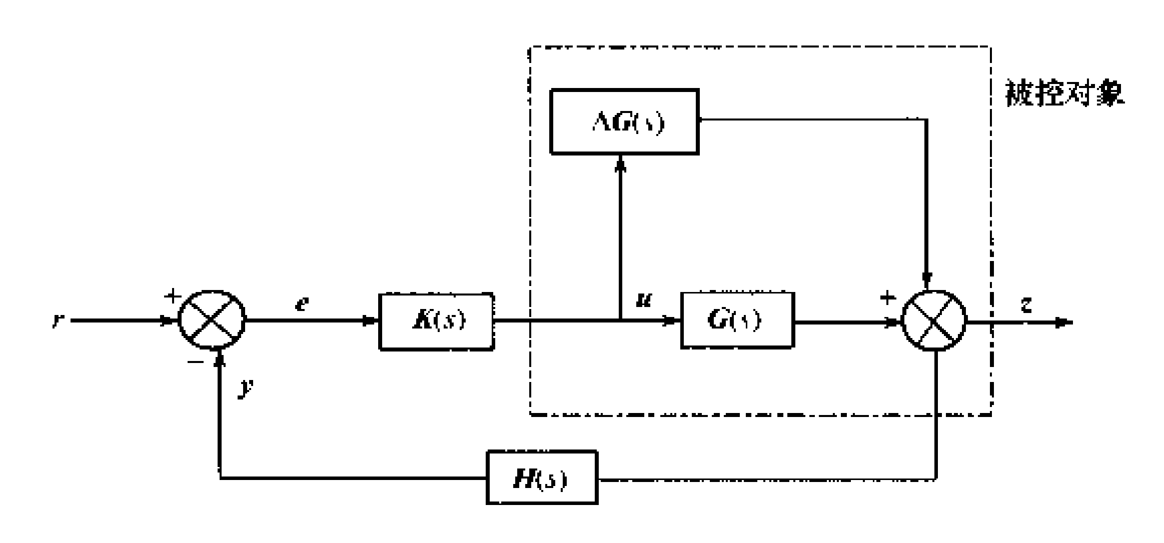


图 1.7　附加摄动

2. 相乘摄动

相乘摄动的结构图如图 1.8 所示。

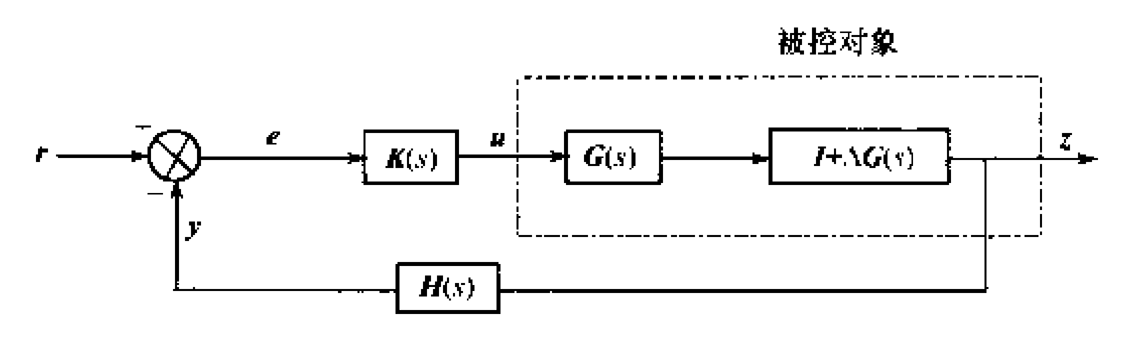


图 1.8　相乘摄动

图中 $\Delta G(s)$ 表示系统的相乘摄动，摄动后对象的传递函数矩阵为

$$G'_r(s) = [I + \Delta G(s)]G(s) \tag{1.27}$$

要指出的是，模型的附加摄动与相乘摄动这两种表达式都没有对摄动的结构形式作任何限制，从而能够表达各种原因所引起的模型摄动。相乘摄动可以看成是一种附加摄动。另一方面，当 $G(s)$ 可逆时，模型的附加摄动也可看成是相乘摄动的一种特殊

形式。这只需对式(1.26)稍加变形即为

$$G_r'(s) = G(s) + \Delta G(s) = [I + \Delta G(s) G^{-1}(s)] G(s) \tag{1.28}$$

因此,对于系统的模型摄动,只考虑相乘摄动或附加摄动即可。

控制系统除了被控对象的模型摄动外,还存在着控制器的参数摄动,这主要是由于控制元件的制造容差,系统运行后元件的老化及环境变化所造成的。

控制系统的模型摄动与控制器的参数摄动,其最终结果可归结为对控制系统各回路的幅值与相位的影响。因此,考虑用图 1.9 所示的摄动形式来表示系统因各种原因引起的模型摄动及参数摄动。

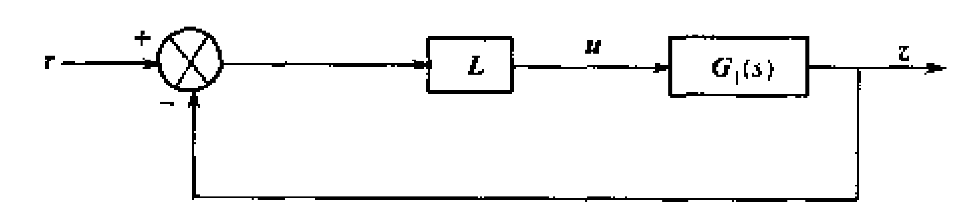


图 1.9 一般摄动形式

图中 $L = \mathrm{diag}(L_1, L_2, \cdots, L_n)$,其中 $L_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 是可变复数,$G_1(s)$ 是系统的开环传递函数。

1.3.3 控制系统的鲁棒控制设计

控制系统的稳定性分析在设计反馈补偿矩阵时起着十分重要的作用。传统的设计方法是基于 SISO 系统的频率域描述,旨在减小灵敏度并提高稳定裕度。使用幅值/相位裕度实际上是从频率响应数据的角度对这种处理方法进行了标准的定量描述。从传统的设计方法的经验可知,由于非结构模型不确定性所造成的相位误差在系统的性能指标和稳定裕度中起着十分重要的作用,特别是相位误差对与系统性能有本质关联的增益和带宽会带来限制条件。对于 MIMO 系统的设计问题,不存在这样一个简单的稳定裕度的概念来衡量由模型的相位误差所引起的稳定性的变化。

对于 MIMO 系统的实际设计方法是着重于通过使用特殊矩阵范数将增益裕度的概念自然推广到多环情况。相对于标准系统模型 $\boldsymbol{G}(s)$，模型不确定性有两种描述方法，一种参考绝对误差的概念，即前面所讲的附加摄动 $\boldsymbol{G}(s)\rightarrow\boldsymbol{G}(s)+\boldsymbol{\Delta}_a(s)$；另一种是参考相对误差的概念，即相乘摄动 $\boldsymbol{G}(s)\rightarrow[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Delta}_m(s)]\boldsymbol{G}(s)$。模型误差通过一个适当范数的有界函数来描述：

$$\|\boldsymbol{\Delta}_a(\mathrm{j}\omega)\|_2\leqslant I_a(\mathrm{j}\omega) \tag{1.29}$$

$$\|\boldsymbol{\Delta}_m(\mathrm{j}\omega)\|_2\leqslant I_m(\mathrm{j}\omega) \tag{1.30}$$

这种模型误差的量测方法是很粗糙的，它将模型不确定性限定为多环系统增益的一种保守性量测。在相对于不确定性模型来设计系统和分析闭环系统稳定性时，我们所关心的是反馈矩阵在什么条件下能满足上述约束条件的所有可能的系统都稳定。考虑下面相对于非结构模型不确定性的设计方法。

设如图 1.10 所示反馈系统，该系统的标称模型为 $\boldsymbol{G}(s)$，稳定控制器为 $\boldsymbol{K}(s)$，则闭环系统是稳定的，其传递函数为

$$\boldsymbol{H}(s)=\boldsymbol{G}(s)(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{GK}(s))^{-1} \tag{1.31}$$

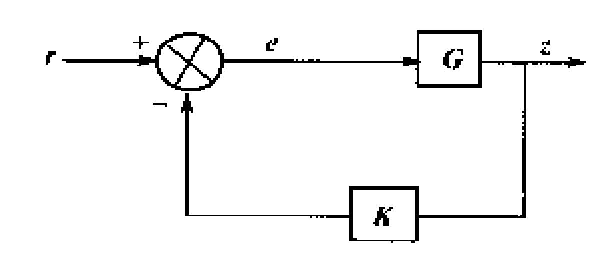


图 1.10　反馈系统

如果我们所设计的闭环系统具有一定的鲁棒性，那么 $\boldsymbol{K}(s)$ 同样可以稳定$[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Delta}_m(s)]\boldsymbol{G}(s)$。系统鲁棒稳定的充分条件是：

(1) $\boldsymbol{\Delta}_m(s)$ 是稳定的传递函数；

(2) $\|\boldsymbol{KG}(\mathrm{j}\omega)\|_2\leqslant\dfrac{1}{I_m(\omega)}$，对于 $0\leqslant\omega\langle\infty, I_m\rangle>1$。

现在假设系统干扰具有如下形式：

$$\boldsymbol{\Delta}(s)=\boldsymbol{L}^{-1}(s)\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{r}(s) \tag{1.32}$$

鲁棒稳定性条件如表 1.1 所列。

表 1.1　鲁棒稳定条件

模型不确定性	鲁棒稳定频率相关充分条件
(1) 忽略传感器动态特性 $G\to(I+\Delta)G$	$\Vert[RGK(I+GK)^{-1}L^{-1}](j\omega)\Vert_2<1,\forall\omega$
(2) 忽略执行机构动态特性 $G\to G(I+\Delta)$	$\Vert[RKG(I+KG)^{-1}L^{-1}](j\omega)\Vert_2<1,\forall\omega$
(3) 忽略系统模态 $G\to G+\Delta$	$\Vert[RK(I+GK)^{-1}L^{-1}](j\omega)\Vert_2<1,\forall\omega$

表 1-1 中 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{R}$ 是稳定的传递函数矩阵,它在一定程度上用更结构化的方法来描述频率相关模型的不确定性。$\boldsymbol{\Phi}$ 是稳定的未知传递函数矩阵,且

$$\Vert\boldsymbol{\Phi}(j\omega)\Vert_2\leqslant 1,\forall_\omega \tag{1.33}$$

通过应用小增益原理可获得相对于选定的不确定性模型所产生的各种鲁棒闭环稳定的充分条件。典型的模型不确定性及相应的频率相关充分条件如表 1-1 所列。

在实际设计过程中,可能会将各种模型不确定性综合起来,并且在某些环节中模型不确定性会起主导作用。对于这种形式的结构不确定性,Doyle 进行了研究。他指出,系统模型不确定性可表达为更一般的形式:将模型不确定性独立出来成为附加外部反馈环,如图 1.11 所示。

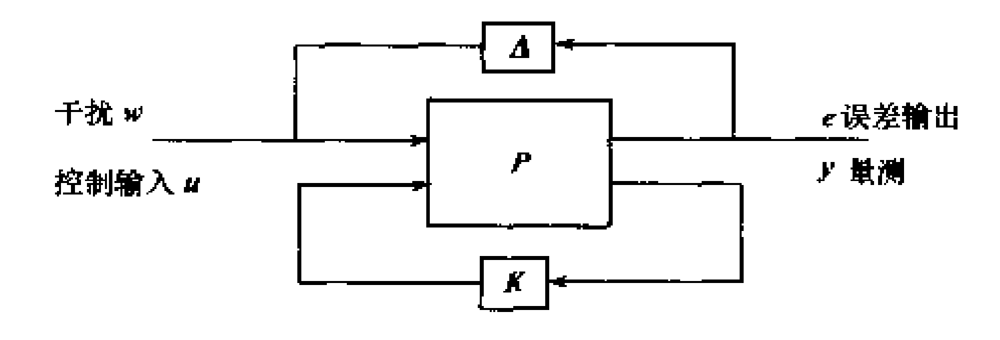


图 1.11　鲁棒控制问题的一般结构

这样,模型不确定性就可视为从特定误差输出 e 到特定干扰输人 w 的寄生反馈矩阵。在这种情况下,令传递函数模型 P 代表已知动态模型,形式为

$$\begin{bmatrix} e \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{ew} & P_{eu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \tag{1.34}$$

则从 w 列出传递函数矩阵为线性分式变换

$$G(K) = P_{ew} + P_{eu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} \tag{1.35}$$

对于这种形式的鲁棒稳定的充分条件为

$$\| R[P_{ew} + P_{eu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw}]L^{-1} \|_2 < 1, \forall \omega \tag{1.36}$$

第2章　H_∞ 优化问题理论

2.1　H_∞ 优化问题的描述

从前面的讨论可知道，H_∞ 优化问题的提出是从鲁棒性设计开始的。在单变量控制系统中，系统的鲁棒性可以从系统的开环传递函数的幅频和相频特性中可靠地估计出来。对于多变量控制系统，由于系统中有众多不同的输入输出量，幅值与相位的意义变得模糊了，这样就引入状态空间法来处理多变量情况。因此在 H_∞ 优化问题描述中除了介绍频率域描述外，还将介绍状态空间描述。

2.1.1　H_∞ 优化问题的频率域描述

控制系统的 H_∞ 优化问题的研究始于 Zames 的论文，它考虑了 SISO 线性反馈系统的灵敏度函数的无穷范数极小化问题。这一工作处理了古典控制理论中的一些基本问题，因此立即引起了人们的注意；尤其是当人们认识到这种方法在处理鲁棒性时比其它的优化方法更直接以后，该方法就很快被应用到更一般的问题中。

控制系统的 H_∞ 优化实质上是极小化某些闭环频率响应函数的峰值。为了说明这一点，考虑图 2.1 所示单变量单位反馈系统。图中 P 为对象的传递函数，C 为补偿器的传递函数，v 为作用在系统上的干扰信号，z 为控制系统的输出。由 v 到 z 的闭环传递函数，即反馈系统的灵敏度函数为

$$S = \frac{1}{1 + PC} \tag{2.1}$$

灵敏度函数表征了控制系统输出对干扰的灵敏度。理想情况下

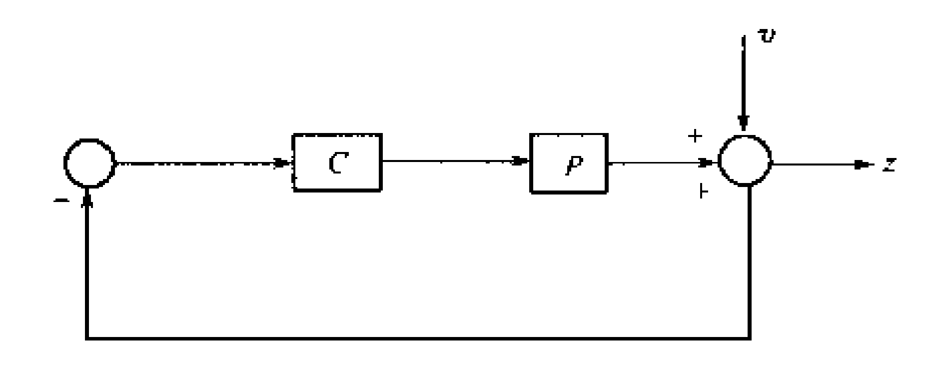


图 2.1　SISO 反馈回路

$S = 0$。

Zames 最初考虑的问题是寻找一补偿器 C，使得闭环系统稳定且极小化灵敏度函数的峰值，这个峰值定义为

$$\| S \|_{\infty} = \max_{\omega \in R} | S(j\omega) |, \quad R \text{ 为实数集} \tag{2.2}$$

因为在无限频率范围内，某些函数的峰值可能不存在，所以用上确界或最小上界来取代最大值，则

$$\| S \|_{\infty} = \sup_{\omega \in R} | S(j\omega) | \tag{2.3}$$

这一问题是合理的。如果灵敏度函数 S 的峰值 $\| S \|_{\infty}$ 小，则在所有频率上 S 的幅值都小，干扰被一致衰减。$\| S \|_{\infty}$ 的极小化是最坏情况下的优化，因此该方法相当于极小化最坏干扰对输出的影响。最坏情况模型有一个重要的数学解释。假设干扰 v 具有未知频率成分，但是有有限能量 $\| v \|_2^2$。我们定义

$$\| v \|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) \mathrm{d}t} \tag{2.4}$$

是干扰的 2 范数。v 的能量是它的 2 范数的平方，则图 2.2 所示系

图 2.2

统 S 的范数 $\| S \|$ 定义为

$$\| S \| = \sup_{\| v \|_2 < \infty} \frac{\| z \|_2}{\| v \|_2} \tag{2.5}$$

这是 2 范数的诱导范数。根据 Parseval 定理，不难得到

$$\| S \| = \| S \|_{\infty} \tag{2.6}$$

式(2.6)表明,峰值 $\| S \|_{\infty}$ 正是系统范数 $\| S \|$,因此,H_{∞} 优化就是系统范数的极小化问题。在最坏情况下,设计者希望能找到一个补偿器 C,使得它能最好地抑制存在的最坏干扰。每个实际对象和补偿器的频率响应函数在高频处都要衰减,这表明灵敏度函数 S 在低频处可以很小,在高频处渐近趋于 1。灵敏度函数 S 在低频处的大小并没有反映到峰值中,但是它对于控制系统的性能来说是最重要的。因此人们通常引入频率加权函数 W,并考虑如下的极小化问题

$$\| WS \|_{\infty} = \sup_{\omega \in R} | W(j\omega)S(j\omega) | \tag{2.7}$$

W 在低频处很大,到高频处就衰减下来。

为了描述峰值极小化和鲁棒性之间的联系,考虑SISO反馈系统(见图 2.1)的回路增益 $L = PC$ 的 Nyquist 图(见图 2.3)。要研究的主要问题是当系统回路增益受到摄动从标称值 L_0 变化到实际值 L 时,反馈系统是否仍能保持稳定。

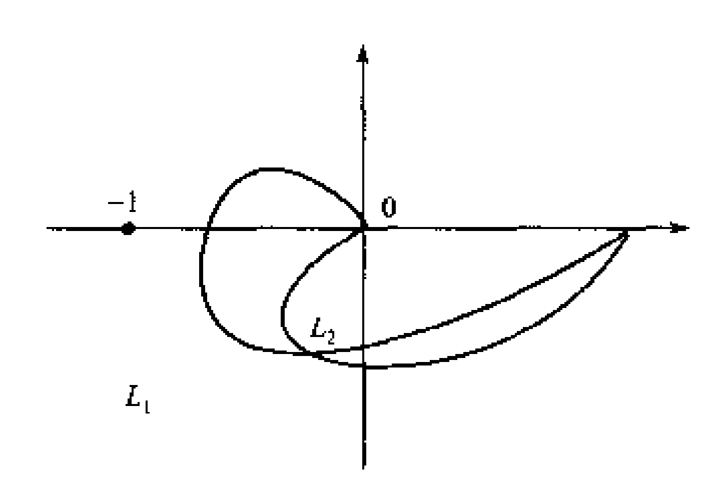


图 2.3 Nyquist 图

现假设系统开环稳定且标称闭环系统稳定,则根据 Nyquist 稳定判据,标称回路增益 L_0 的 Nyquist 图不包围 −1 点,实际闭环系统稳定的充分条件是实际回路增益 L 的 Nyquist 图不包围 −1 点。由图 2.3 可知,L 的 Nyquist 图不包围 −1 点的充分条件是对于所有频率 ω,L 的 Nyquist 图上相应点 $L(j\omega)$ 和 L_0 的 Nyquist 图上的

相应点 $L_0(j\omega)$ 之间的距离 $|L(j\omega)-L_0(j\omega)|$ 小于 $L_0(j\omega)$ 和 -1 点间的距离 $|L_0(j\omega)+1|$，即

$$|L(j\omega)-L_0(j\omega)|<|L_0(j\omega)+1|,\quad \omega\in R \tag{2.8}$$

上式等价于

$$\frac{|L(j\omega)-L_0(j\omega)|}{|L_0(j\omega)|}\cdot\frac{|L_0(j\omega)|}{|L_0(j\omega)+1|}<1,\quad \omega\in R \tag{2.9}$$

标称闭环系统的补灵敏度函数 T_0 定义为

$$T_0=1-S_0=1-\frac{1}{1+L_0}=\frac{L_0}{1+L_0} \tag{2.10}$$

其中 S_0 为标称灵敏度函数。由式(2.10)可知，如果

$$\frac{|L(j\omega)-L_0(j\omega)|}{|L_0(j\omega)|}\cdot|T_0(j\omega)|<1,\quad \omega\in R \tag{2.11}$$

则受摄动的闭环系统稳定。式(2.11)中的因子 $|L(j\omega)-L_0(j\omega)|/|L_0(j\omega)|$ 为回路增益 L 的相对摄动。假定相对摄动满足下列不等式

$$\frac{|L(j\omega)-L_0(j\omega)|}{|L_0(j\omega)|}\leqslant|W(j\omega)|,\quad \omega\in R \tag{2.12}$$

其中 W 为给定的频率函数，则

$$\frac{|L(j\omega)-L_0(j\omega)|}{|L_0(j\omega)|}\cdot|T_0(j\omega)|\leqslant|W(j\omega)T_0(j\omega)| \tag{2.13}$$

因此根据式(2.11)，如果

$$|W(j\omega)T_0(j\omega)|<1,\omega\in R \tag{2.14}$$

则对于所有满足式(2.12)的摄动，闭环系统稳定。可以证明式(2.14)是满足式(2.12)的闭环系统稳定的充要条件。条件(2.14)是在假设开环系统稳定的前提下获得的。可以证明，当标称开环系统和受摄动开环系统具有相同数目的右半平面极点时，鲁棒稳定条件(2.14)对于开环不稳定系统仍成立。采用范数概念，鲁棒稳定条件(2.14)可改写为

$$\|WT_0\|_\infty<1 \tag{2.15}$$

下面我们考虑摄动的一般模型。考虑形如 $L_0 \to L$ 的摄动，其中 $|L(j\omega)-L_0(j\omega)|/|L_0(j\omega)| \leqslant |W(j\omega)|, \omega \in R$。这等价地可写成

$$L_0 \to L_0(1+\delta_L W) \tag{2.16}$$

其中 δ_L 为任意频率函数，它满足 $|\delta_L(j\omega)| \leqslant 1, \omega \in R$，即

$$\|\delta_L\|_\infty \leqslant 1 \tag{2.17}$$

这种形式的摄动可用图 2.4 来表示。

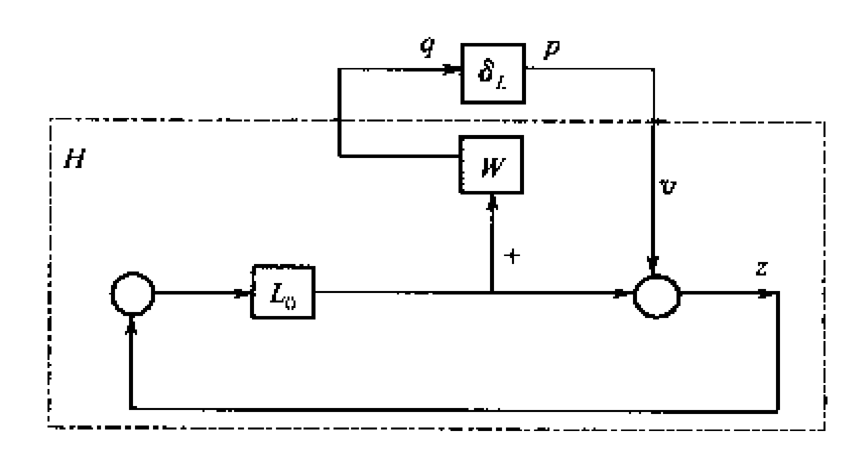


图 2.4　具有摄动的反馈回路

图2.4的一般情况见图2.5所示。图2.5中摄动 δ 和 H 分离开了。根据小增益定理，图 2.5 所示闭环系统稳定的充分条件是 $\|H\delta\| < 1$，由不等式 $\|H\delta\| \leqslant \|H\| \cdot \|\delta\|$ 可得 $\|H\delta\| < 1$ 的充分条件为 $\|H\| \cdot \|\delta\| < 1$。利用无穷范数可得摄动系统稳定的充分条件，即对于所有满足 $\|\delta\|_\infty \leqslant 1$ 的摄动 δ，摄动系统稳定的充分条件是

$$\|H\|_\infty < 1 \tag{2.18}$$

实际上，鲁棒稳定条件(2.18) 是一个充要条件。若将上述结论用

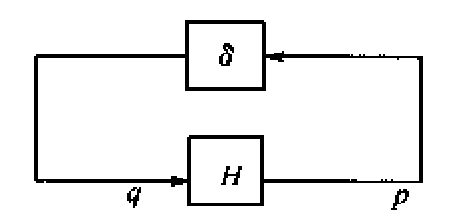


图 2.5　一般摄动模型

于图 2.4 所示系统，可以得到：H 为从 p 到 q 的传递函数

$$z = p - L_0 z$$

即

$$z = \frac{1}{1 + L_0} p \tag{2.19}$$

从图中还可以看出

$$q = -WL_0 z = -W\frac{L_0}{1 + L_0} \cdot p = -WT_0 p \tag{2.20}$$

所以传递函数 H 为

$$H = -WT_0 \tag{2.21}$$

系统鲁棒稳定的条件是

$$\| WT_0 \|_\infty < 1 \tag{2.22}$$

而式(2.22) 正是鲁棒稳定条件式(2.15)。

具有上述鲁棒稳定充要条件(2.18) 的一般摄动模型不仅适用于 SISO 系统，而且也可用于 MIMO 系统。

现在讨论 MIMO 系统如何定义无穷范数问题。考虑图 2.6 所示稳定的 MIMO 系统，系统的无穷范数是下列范数的诱导范数。

图 2.6　MIMO 系统

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{u} \|_2 &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{u}^H(t)\boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t} \\ \| \boldsymbol{y} \|_2 &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{y}^H(t)\boldsymbol{y}(t)\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{2.23}$$

根据 Parseval 定理，这些信号范数诱导出来的系统范数为

$$\| \boldsymbol{F} \|_\infty = \sup_{\omega \in R} \| \boldsymbol{F}(\mathrm{j}\omega) \|_2 \tag{2.24}$$

其中对于常数复矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\| \boldsymbol{A} \|_2$ 表示谱范数

$$\| \boldsymbol{A} \|_2 = \max_i \sigma_i(\boldsymbol{A}) \tag{2.25}$$

这里 σ_i 表示第 i 个奇异值。

下面研究一种特殊的摄动形式——分子 - 分母摄动，它依赖

于对象传递函数 P 的分式表示

$$P=\frac{N}{D} \tag{2.26}$$

若 P 为有理的，则 N 为分了多项式，D 为分母多项式。分子 - 分母摄动模型将摄动表示为下列形式：

$$P=\frac{N_0}{D_0}\rightarrow P=\frac{N_0+M\delta_N W_2}{D_0+M\delta_D W_1} \tag{2.27}$$

其中 N_0 和 D_0 表示标称系统。$M\delta_D W_1$ 和 $M\delta_N W_2$ 分别为分母和分子的不确定性模型。频率函数 MW_1 和 MW_2 分别表示分母和分子的最大可能摄动。δ_D 和 δ_N 是幅值不大于 1 的频率函数。摄动 (2.27) 可以用图 2.7 的结构来表示。

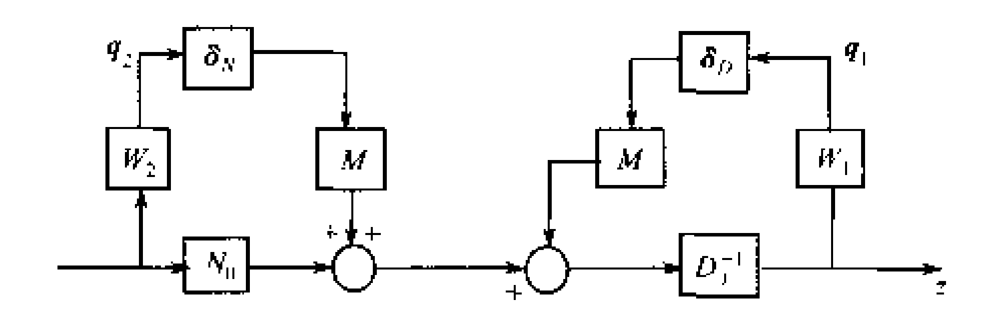


图 2.7　分子 - 分母摄动模型

当采用图 2.7 所示的分子 - 分母摄动模型时，图 2.1 所示的反馈系统可以表示成图 2.8 所示形式。

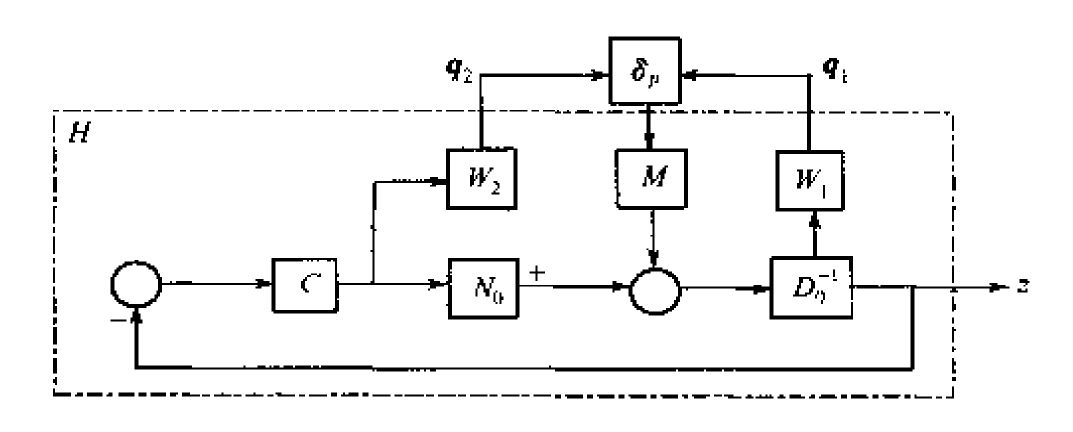


图 2.8　反馈回路中的分子 - 分母摄动模型

其中

$$\boldsymbol{p}=-\delta_D\boldsymbol{q}_1+\delta_N\boldsymbol{q}_2=[-\delta_D\ \delta_N]\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1\\ \boldsymbol{q}_2\end{bmatrix} \tag{2.28}$$

定义： $\delta_p = [-\delta_D\ \delta_N]$, $\quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{bmatrix}$

假设闭环系统稳定，且 M，W_1 和 W_2 的所有极点均位于开左半平面内。图2.8中虚线部分相当于图2.5中的 H，它的输入为 $\boldsymbol{p}$，输出：

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{bmatrix}$$

为了得到传递函数 H，首先由信号平衡方程

$$\boldsymbol{z} = D_0^{-1}(M\boldsymbol{p} - N_0 C\boldsymbol{z})$$

可得

$$\boldsymbol{z} = \frac{D_0^{-1}M\boldsymbol{p}}{1 + D_0^{-1}N_0 C} = \frac{V}{1 + P_0 C}\boldsymbol{p} \tag{2.29}$$

其中 $V = D_0^{-1}M$。进一步有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{q}_1 &= W_1\boldsymbol{z} = \frac{W_1 V}{1 + P_0 C}\cdot\boldsymbol{p} = W_1 S_0 V\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q}_2 &= -W_2 C\boldsymbol{z} = -\frac{W_2 CV}{1 + P_0 C}\cdot\boldsymbol{p} = W_2 U_0 V\boldsymbol{p} \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

其中 $S_0 = \dfrac{1}{1 + P_0 C}$，$U_0 = \dfrac{C}{1 + P_0 C}$ 分别为反馈系统的标称灵敏度函数和标称输入灵敏度函数。输入灵敏度函数 U 是从干扰到对象输入的传递函数，它和补灵敏度函数 T 的关系为 $T = PU$。

由式(2.30)，图2.8中传递函数 H 为

$$H = \begin{bmatrix} W_1 S_0 V \\ -W_2 U_0 V \end{bmatrix}$$

我们知道，1×2 矩阵 $\boldsymbol{A} = [A_1, A_2]$ 的奇异值为 $\sqrt{\|A_1\|_2^2 + \|A_2\|_2^2}$，$2\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = [A_1, A_2]^{\mathrm{T}}$ 的奇异值也为 $\sqrt{\|A_1\|^2 + \|A_2\|^2}$，所以摄动 $\delta_P = [-\delta_D\ \delta_N]$ 的无穷范数和图2.8所示系统的无穷范数的平方分别为

$$\|\delta\|_\infty^2 = \sup_{\omega\in R}(|\delta_D(\mathrm{j}\omega)|^2 + |\delta_N(\mathrm{j}\omega)|^2) \tag{2.31}$$

$$\|H\|_\infty^2 = \sup(|W_1(\mathrm{j}\omega)S_0(\mathrm{j}\omega)V(\mathrm{j}\omega)|^2 +$$

$$| W_2(j\omega)U_0(j\omega)V(j\omega)|^2) \tag{2.32}$$

对于所有满足如下条件的分子-分母摄动

$$|\delta_D(j\omega)|^2+|\delta_N(j\omega)|^2\leqslant 1 \qquad \omega\in R \tag{2.33}$$

闭环系统鲁棒稳定的充要条件是灵敏度函数 S_0 和输入灵敏度函数 U_0 满足不等式

$$|W_1(j\omega)S_0(j\omega)V(j\omega)|^2+ |W_2(j\omega)U_0(j\omega)V(j\omega)|^2<1, \quad \omega\in R \tag{2.34}$$

现在令

$$\frac{D-D_0}{D_0}=\frac{M\delta_D W_1}{D_0}=VW_1\delta_D=w_1\delta_D \tag{2.35}$$

$$\frac{N-N_0}{N_0}=\frac{M\delta_N W_2}{N_D}=\frac{VW_2}{P_0}\delta_N=w_2\delta_N \tag{2.36}$$

其中 $w_1=VW_1, w_2=VW_2/P_0$。这种摄动系统鲁棒稳定的充要条件是

$$|S_0(j\omega)w_1(j\omega)|^2+|T_0(j\omega)w_2(j\omega)|^2<1, \quad \omega\in R \tag{2.37}$$

函数 w_1 和 w_2 分别为对象 P 的分母和分子的相对摄动大小的度量。鲁棒稳定性准则(2.37)表明:在分母的相对摄动比较大的频段,标称灵敏度函数 S_0 应该比较小,而在分子的相对摄动比较大的频段,标称补灵敏度函数 T_0 应该比较小。这就意味着低频摄动最好作为分母摄动来处理。低频摄动通常是由参数不确定性引起的,常称之为结构不确定性。另一方面高频摄动最好作为分子摄动来处理,因为补灵敏度函数 T_0 在高频处小。高频摄动常由寄生效应和未建模动态所引起,常称之为非结构不确定性。

上面所讨论的这种形式的鲁棒性设计问题实质上是混合灵敏度问题的一种形式。混合灵敏度问题是频率响应成形的有效方法。通过适当选择函数 V, W_1 和 W_2,可以使灵敏度函数在低频段小,而输入灵敏度函数在高频段小,这些是系统充分抑制干扰所必须具备的条件。另一方面,低频段小的灵敏度函数 S 可以抵抗对象

分母的低频摄动，而高频段小的补灵敏度函数 T 可以抵抗对象分子的高频摄动。S 的低频性能和 T 的高频性能的研究可以用来估计允许摄动的最大范围。相反，任何可获得的有关摄动大小的信息都可用来选择加权函数 V, W_1 和 W_2，这些函数的选择一般要考虑性能和鲁棒性的要求。

2.1.2 H_∞ 优化问题的状态空间描述

现代多变量控制已经取得了很大的进展。LQG(Linear Quadric Gaussian) 控制理论作为一个主流，使得人们能随心所欲地设计多变量动态补偿器。以前设计多变量控制器采用一次选取一个闭环 SISO 系统，这种方法只有在对角占优的情况下才是有效的，而 LQG 理论原则上可以用于任意系统。在 LQG 方法中，输入作为白噪声，而输出的稳定状态相关系数被极小化。工程问题就是将约束条件转化为适当的加权函数。但是 LQG 方法在应用过程中也出现过很多问题，如鲁棒性问题。由于采用的模型存在偏差，这就要求在设计控制器时将模型的不确定性考虑在内，但模型不确定性并不完全适合于 LQG 框架结构，即模型不确定性产生的效果不能用白噪声来代替。这样对于多变量控制系统的鲁棒性设计，就提出了使用 H_∞ 理论。H_∞ 范数不仅对于与模型不确定性有关的各种问题是非常有效的，而且能用幅频特性加以解释。同时，H_∞ 理论通过设计适当加权函数将指标转化为 H_∞ 范数界的问题。下面着重于介绍 H_∞ 优化问题的状态空间描述。

首先介绍几个概念：

(1) 称 $\bar{s}$ 为系统($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$) 的不变零点，当 $s = \bar{s}$ 时矩阵 $\begin{pmatrix} s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$降秩。

(2) 对于一个有理矩阵 $\boldsymbol{G}$，用 $\mathrm{rank}_{R(s)}\boldsymbol{G}$ 来表示 $\boldsymbol{G}$ 的秩。

(3) L_∞ 为定义在虚轴上的矩阵值函数的线性空间。H_∞ 为定义在开右半复平面内解析且有界的矩阵函数构成的线性空间。显然有，$H_\infty \subset L_\infty$。

一个有理的传递函数矩阵属于 H_∞ 当且仅当这个传递矩阵是稳定的并且为真，当 $G \in H_\infty$ 时，我们定义

$$\| G \|_\infty \doteq \sup_{\omega \in R} \sigma [G(j\omega)] \tag{2.38}$$

σ 表示最大奇异值。因此 H_∞ 范数实际上是幅频特性的峰值。对于多变量系统，用最大奇异值来代替绝对值。设有一个线性时不变系统

$$\sum : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases} \tag{2.39}$$

找一个动态补偿器

$$\sum_F : \begin{cases} \dot{p} = Kp + Ly \\ u = Mp + Ny \end{cases} \tag{2.40}$$

通过反馈 $\sum_F$ 使闭环系统内部稳定，并且 H_∞ 范数严格小于某一预先给定值 γ。以下我们将导出这种补偿器存在的充分必要条件。首先做两个假设：

(1) 两个直馈矩阵应该分别为 1-1 映射和上映射；

(2) 两个给定子系统在虚轴上没有不变零点。

这样就给出使闭环控制系统的 H_∞ 范数小于某一给定值 γ 的内部稳定控制器存在的充分必要条件为：两个给定的 Riccati 方程应该有半正定的稳定解，并且这两个解的乘积的谱半径小于 γ^2。第一个 Riccati 方程与使 H_∞ 范数小于 γ 有关；第二个 Riccati 方程是第一个 Riccati 方程的伴随方程，并且与状态估计有关。但是两个 Riccati 方程解的乘积的谱半径小于 γ^2 却很难直观解释，它是作为测试状态估计和状态反馈按这种方式组合是否产生我们所期望的结果，即使 H_∞ 范数小于 γ 的内部稳定反馈阵。

假设 1：系统(2.39) 满足以下条件：

(1) (A, E, C_1, D_1) 在虚轴上没有不变零点；

(2) (A, B, C_2, D_2) 在虚轴上没有不变零点。

对于 $P \in R^{n \times n}$，考虑如下矩阵：

$$F(P)=\begin{pmatrix} A^{T}P+PA+C_2^{T}C_2+PEE^{T}P & PB+C_2^{T}D_2 \\ B^{T}P+D_2^{T}C_2 & D_2^{T}D_2 \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

如果 $F(P)\geqslant 0$,就称 P 为二次型矩阵不等式的解。

对于任意 $Q\in R^{n\times n}$,考虑如下矩阵:

$$G(Q)=\begin{pmatrix} AQ+QA^{T}+EE^{T}+QC_2^{T}C_2Q & QC_1^{T}+ED_1^{T} \\ C_1Q+D_1E^{T} & D_1D_1^{T} \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

如果 $G(Q)\geqslant 0$,称 Q 为伴随二次型矩阵不等式的解。

我们定义如下两个矩阵阵束:

$$L(P,s)=(sI-A-EE^{T}P \quad -B)$$

$$M(Q,s)=\begin{pmatrix} sI-A-QC_2^{T}C_2 \\ -C_1 \end{pmatrix}$$

其中 $L(P,s)$ 是与系统

$$\dot{x}=(A+EE^{T}P)x+Bu$$

相关的可控性矩阵束;$M(Q,s)$ 是与系统

$$\begin{cases} \dot{x}=(A+QC_2^{T}C_2)x \\ y=-C_1x \end{cases} \tag{2.43}$$

相关的可观测阵束。

再定义两个传递矩阵:

$$G_{ci}(s)=C_2(sI-A)^{-1}B+D_2$$

$$G_{di}(s)=C_1(sI-A)^{-1}E+D_1$$

令 $\rho(\cdot)$ 表示谱半径。

定理 2.1 考虑系统(2.39),设系统(A,B,C_2,D_2)与(A,E,C_1,D_1)在虚轴上没有不变零点,则下面的叙述是等价的:

(1) 对于系统(2.39),存在一个时不变有限维动态补偿器 $\sum_F:\begin{cases} \dot{p}=Kp+Ly \\ u=Mp+Ny \end{cases}$,使得闭环系统的传递矩阵 G_F 为内部稳定并且 H_∞ 范数小于 1,即 $\|G_F\|_\infty<1$。

(2) 存在半正定矩阵 P,Q 使得 $F(P)\geqslant 0, G(Q)\geqslant 0$ 和 $\rho(PQ)<1$ 成立的同时,以下秩条件成立:

① $\mathrm{rank}F(P)=\mathrm{rank}_{R(s)}G_{ci}$;

② $\mathrm{rank}G(Q)=\mathrm{rank}_{R(s)}G_{di}$;

③ $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}L(P,s)\\F(P)\end{pmatrix}=n+\mathrm{rank}_{R(s)}G_{ci}; \forall s\in C^0\cup C^+$;

④ $\mathrm{rank}(M(Q,s)\quad G(Q))=n+\mathrm{rank}_{R(s)}G_{di}, \forall s\in C^0\cup C^+$。

这里应说明:

(a) 对于 P 的约束是与状态反馈的 H_∞ 控制问题相关的。对于 Q 的约束是与对 P 的约束相伴随的。Q 的存在性与我们能否在观测 y 的基础上对状态 x 进行良好地估计有关。而检验我们能否同时估计和控制并达到预期效果则由耦合条件 $\rho(PQ)<1$ 决定。

(b) 我们总有可能找到与原系统同阶的动态补偿器。可以看出存在一个适当的控制器,其阶数为 $n-\mathrm{rank}[C_1\ D_1]+\mathrm{rank}D_1$。补偿器的动态部分实际是状态观测器。因此如果可直接获得 k 个无噪声的状态,则可得到补偿器的阶数为 $n-k$。虽然在实际量测中存在噪声,但如果噪声与状态相比较小时,就可省略噪声而获得低阶补偿器。

(c) 当 D_1 为单映射,D_2 为满映射的情况称为正则 H_∞ 控制问题,对应地,当这两个条件之一不被满足时称为奇异 H_∞ 控制问题。在正则情况下,如果 P、Q 存在并满足定理 2.1 中的(2),则满足(1) 的控制器为

$$\sum\nolimits_F:\begin{cases}\dot{p}=K_{P,Q}p+L_{P,Q}y\\u=M_{P,Q}y\end{cases}\tag{2.44}$$

式中

$$M_{P,Q}=-(D_2^{\mathrm{T}}D_2)^{-1}(D_2^{\mathrm{T}}C_2+B^{\mathrm{T}}P)$$

$$L_{P,Q}=(I-QP)^{-1}Q(C_1^{\mathrm{T}}+PED_1^{\mathrm{T}})(D_1D_1^{\mathrm{T}})^{-1}+ED_1^{\mathrm{T}}(D_1D_1^{\mathrm{T}})^{-1}$$

$$K_{P,Q}=A+EE^{\mathrm{T}}P+BM_{P,Q}-L_{P,Q}(C_1+D_1E^{\mathrm{T}}P)$$

(d) 满足①,③的二次型矩阵不等式 $F(P)\geqslant 0$ 的解 P 是惟

一的。同理满足 ②,④ 的二次型不等式 $G(Q) \geqslant 0$ 的解 Q 是惟一的。P 和 Q 的存在性可通过确定这些矩阵的核来判定,而核的补阵满足代数 Riccati 方程。

下面看两个特殊情况:

(1) $C_1 = I, D_1 = 0$

这时有 $y = x$,由于式(2.42),当 $Q = 0$ 时,$G(Q) \geqslant 0$ 成立;另一方面 $\mathrm{rank}_{R(s)} G_{di} = \mathrm{rank}_{R(s)} (sI - A)^{-1} E = \mathrm{rank} E$,这样当 $Q = 0$ 时,条件 ② 和 ④ 是成立的。考虑到 $Q = 0$ 时,$\rho(PQ) < 1$ 自然得到满足,因此定理 2.1 化为

存在半正定解 P:使二次型不等式 $F(P) \geqslant 0$ 成立,并满足以下两个秩条件:

① $\mathrm{rank} F(P) = \mathrm{rank}_{R(s)} G_{ci}$;

② $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} L(P,s) \\ F(P) \end{pmatrix} = n + \mathrm{rank}_{R(s)} G_{ci} \quad \forall s \in C^0 \cup C^+$

(2) 正则情况:D_1 为单映射,D_2 为满映射

此时 $F(P) \geqslant 0$ 与秩条件(a) 等价于

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + C_2^{\mathrm{T}}C_2 + PEE^{\mathrm{T}}P - (PB + C_2^{\mathrm{T}}D_2) \cdot (D_2^{\mathrm{T}}D_2)^{-1}(B^{\mathrm{T}}P + D_2^{\mathrm{T}}C_2) = 0$$

同理 $G(Q) \geqslant 0$ 与秩条件(b) 等价于

$$AQ + QA^{\mathrm{T}} + EE^{\mathrm{T}} + QC_2^{\mathrm{T}}C_2Q - (QC_1^{\mathrm{T}} + ED_1^{\mathrm{T}}) \cdot (D_1D_1^{\mathrm{T}})^{-1}(C_1Q + D_1E^{\mathrm{T}}) = 0$$

而条件(c) 和(d) 等价于以下两个矩阵为渐近稳定的:

$$A + EE^{\mathrm{T}}P - B(D_2^{\mathrm{T}}D_2)^{-1}(B^{\mathrm{T}}P + D_2^{\mathrm{T}}C_2)$$

$$A + QC_2^{\mathrm{T}}C_2 - (QC_1^{\mathrm{T}} + ED_1^{\mathrm{T}})(D_1D_1^{\mathrm{T}})^{-1}C_1$$

再加上 $$\rho(PQ) < 1$$

上面给出了闭环系统 H_∞ 范数严格小于 1 的稳定补偿器存在的充分必要条件。这里必须要给出假设 1 及假设 D_1 为单映射,D_2 为满映射。在这些假设条件下,H_∞ 控制器具有显式公式,系统 (A,B,C_2,D_2) 和 (A,E,C_1,D_1) 的稳定零点是闭环系统的极点,

同时系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}_2,\boldsymbol{D}_2)$和$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E},\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{D}_1)$的不稳定零点的镜像映射是闭环系统的极点。如果假设不成立,那么系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}_2,\boldsymbol{D}_2)$或者$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E},\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{D}_1)$在虚轴上有一个零点。对于次优控制器,闭环系统将有一个靠近虚轴上的极点,则系统几乎是不稳定的。

下面研究H_∞怎样被使用于鲁棒控制问题。考虑具有相乘摄动的系统,见图2.9。

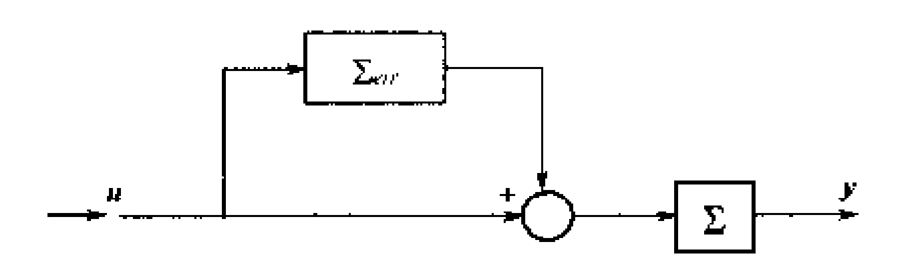


图 2.9　具有相乘摄动系统

这里$\sum_{err}$为任意系统,使上述连结与系统$\sum$具有相同数目的不稳定极点。$\sum_{err}$代表不确定性。我们的目的是找到控制器$\sum_F$使所有不改变图2.9所示系统不稳定极点的$\sum_{err}$使闭环系统满足L_∞范数小于或等于1个给定值γ。

引理 2.1　若给定系统$\sum = (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$和控制器$\sum_F$,下列条件是等价的。

(1) 若使用控制器$\sum_F$,闭环系统对每一个满足如下条件的$\sum_{err}$是配置良好、内部稳定的系统,并且:

① $\sum_{err}$的L_∞范数小于等于γ;

② 系统$(\sum + \sum_{err})$与$\sum$具有相同数目的不稳定极点。

(2) $\sum_F$内部镇定$\sum$,若$\boldsymbol{G}_{ci}$和$\boldsymbol{G}_F$表示$\sum$和$\sum_F$的传递矩阵,则$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}_{ci}\boldsymbol{G}_F$为可逆的,并且$\|\boldsymbol{G}_{ci}\boldsymbol{G}_F(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}_{ci}\boldsymbol{G}_F)^{-1}\|_\infty<\gamma^{-1}$。

设给定$\sum$的一个可镇定可检测的实现,即$\sum$由$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$描述,那么$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$可镇定,$(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A})$可检测,定义一个新系统

$$\sum_{nm}:\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu + Bw \\ y = Cx + Du + Dw \\ z = u\end{cases} \tag{2.45}$$

再重新定义

$$G(Q) = \begin{bmatrix} AQ + QA^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} & QC^{\mathrm{T}} + BD^{\mathrm{T}} \\ CQ + DB^{\mathrm{T}} & DD^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$M(Q,s) = \begin{pmatrix} sI - A \\ -C \end{pmatrix}$$

$$G_{ci}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

设 P_m 和 Q_m 为满足下列条件的惟一半正定矩阵。

①$A^{\mathrm{T}}P_m + P_mA = P_mBB^{\mathrm{T}}P_m$，$A - BB^{\mathrm{T}}P_m$ 为渐近稳定的。

②$G(Q_m) \geqslant 0$，$\mathrm{rank}\,G(Q_m) = \mathrm{rank}_{R(s)}G_{ci}$，

$$\mathrm{rank}(M(Q_m,s)\ G(Q_m)) = n + \mathrm{rank}_{R(s)}G_{ci},\ \forall s \in C^+ \cup C^0$$

由上面的引理可以得到下面的重要结论：

定理 2.2 设系统 $\sum$ 的可镇定，可检测实现为(A,B,C,D)，状态空间为 R^n，给定 $\gamma > 0$。假设 A 阵在虚轴上无奇异值，并假设(A,B,C,D) 在虚轴上无不变零点，定义附加系统 $\sum_{nm}$ 如式(2.45)。在上述假设下，下面三个条件是等价的：

(1) 形如式(2.40) 的从 y 到 u 的控制器存在，并将它用于图 2.9 所示的系统会产生一个对于所有的满足如下条件的 $\sum_{err}$ 为配置良好，内部稳定的闭环系统，并且：

① $\sum_{err}$ 的 L_∞ 范数小于或等于 γ；

② 图 2.9 所示的系统和 $\sum$ 具有相同数目的不稳定极点。

(2) 形如式(2.40) 的从 y 到 u 的控制器存在，并将它用于系统 $\sum_{nm}$ 会产生一个配置良好，内部稳定的闭环系统，且它的 H_∞ 范数小于 1。

(3) A 为稳定的，或者 $1 + \rho(P_mQ_m) < \gamma^{-2}$。

这里应说明：

(a) 我们所给出的干扰虽然是人为的，但是它却包含了所有 H_∞ 范数小于等于 γ 的稳定系统 $\sum_{err}$。

(b) 对于干扰的大小有一个明确的界：定理 2.2 中(3) 表明，对于每一个小于界 $[1+\rho(\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{Q}_m)]^{-\frac{1}{2}}$ 的 γ，都可找到一个满足(1)的适当控制器。

(c) 对于附加摄动形式，其上界依赖于 $\sum$ 的不稳定部分，而不是相乘摄动中所得到的上界 $[1+\rho(\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{Q}_m)]^{-\frac{1}{2}}$。

(d) 对于奇异问题，我们无法取得满足定理 2.2 中(1) 的控制器的显式。并且控制器若满足(1) 当且仅当控制器满足(2)。

虽然上面主要探讨了适用于相乘摄动的 H_∞ 鲁棒控制问题，实际上 H_∞ 方法同样适用于很多不确定性结构。但是有两个条件是必须的：不确定性必须要由 H_∞ 范数界来描述，并且模型、控制器和模型不确定性之间的关系必须是线性的。

2.2 H_∞ 优化算法

在前面的 H_∞ 优化理论的描述中，主要从频率域和时间域两个角度进行的。相应地，H_∞ 优化算法也可以从频率域和时间域两个方面进行研究。

2.2.1 频域法

因为 H_∞ 优化问题本质上还是频域理论，故首先研究频域解法。频域解法中最简单的方法是基于 J 谱因子分解的方法。事实上，J 谱因子分解法是所有解法的基础。

由图 2.10 可以看出，由 $\boldsymbol{w}$ 到 $\boldsymbol{z}$ 的闭环传递函数阵为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{G}_{11}+\boldsymbol{G}_{12}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{G}_{22})^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{G}_{21} \tag{2.46}$$

在求解 H_∞ 优化问题时，人们并没有直接处理 $\|\boldsymbol{H}\|_\infty$ 的极小化问题，而是首先寻找一次优补偿器。所谓次优补偿器是这样一

种补偿器,它能镇定闭环系统且满足

$$\| \boldsymbol{H} \|_{\infty} \leqslant \lambda \tag{2.47}$$

其中 λ 为一给定非负数。然后通过寻找最小值 λ 来获得最优补偿器。上述不等式等价于

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\omega)\boldsymbol{H}(\mathrm{j}\omega) \leqslant \lambda^2 \boldsymbol{I}, \qquad \omega \in R \tag{2.48}$$

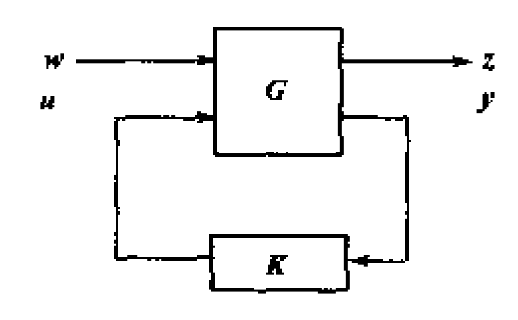


图 2.10 H_{∞} 标准问题

其中如果 $\boldsymbol{H}$ 是有理函数矩阵,记 $\boldsymbol{H}^{*}(s) = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(-s)$。现在考虑 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{K}$ 的特殊情况,这里 $\boldsymbol{P}$ 为给定不稳定对象的传递函数阵,$\boldsymbol{K}$ 为待求的稳定传递函数阵。该问题可以化为 H_{∞} 标准问题,其中 $\boldsymbol{G}_{11} = \boldsymbol{P}, \boldsymbol{G}_{12} = -\boldsymbol{I}, \boldsymbol{G}_{21} = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{G}_{22} = 0$。这一问题就是人们所熟知的 Nehari 问题。将 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{K}$ 代入式(2.48) 得

$$\boldsymbol{P}^{*}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{*}\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}^{*}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{K}^{*}\boldsymbol{K} \leqslant \lambda^2 \boldsymbol{I}, \quad s = \mathrm{j}\omega, \quad \omega \in R$$

即

$$[\boldsymbol{I}\ \boldsymbol{K}^{*}]\begin{bmatrix} \lambda^2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^{*}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{P}^{*} \\ \boldsymbol{P} & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{K} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{2.49}$$

定义

$$\boldsymbol{\pi}_{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda^2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^{*}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{P}^{*} \\ \boldsymbol{P} & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

补偿器 $\boldsymbol{K}$ 可表示为

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{-1} \tag{2.50}$$

其中 $\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 为稳定的有理函数矩阵。式(2.49) 右乘 $\boldsymbol{X}$,左乘 $\boldsymbol{Y}^{*}$,并利用式(2.50) 可得:$\| \boldsymbol{H} \|_{\infty} \leqslant \lambda$ 等价于

$$[\boldsymbol{X}^{*}\boldsymbol{Y}^{*}]\boldsymbol{\pi}_{\lambda}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad s = \mathrm{j}\omega, \quad \omega \in R \tag{2.51}$$

这种简单的推导适用于 Nehari 问题。可以证明,对于一般情况,$\| \boldsymbol{H} \|_{\infty} \leqslant \lambda$ 也与式(2.51) 等价,此时 π_{λ} 定义为

$$\boldsymbol{\pi}_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{G}_{12}^{\sim} & -\boldsymbol{G}_{22}^{\sim} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^2 I - \boldsymbol{G}_{11}\boldsymbol{G}_{11}^{\sim} & -\boldsymbol{G}_{11}\boldsymbol{G}_{12}^{\sim} \\ -\boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{G}_{11}^{\sim} & -\boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{G}_{22}^{\sim} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

$\boldsymbol{\pi}_\lambda$ 为准 Hermitian 矩阵，且 $\tilde{\boldsymbol{\pi}}_\lambda = \boldsymbol{\pi}_\lambda$。如果($\det\boldsymbol{\pi}_\lambda$)没有虚轴上的极点和零点，则 $\boldsymbol{\pi}_\lambda$ 可以 J- 谱分解为

$$\boldsymbol{\pi}_\lambda = \boldsymbol{Z}_\lambda^{\sim}\boldsymbol{J}\boldsymbol{Z}_\lambda \tag{2.53}$$

$\boldsymbol{Z}_\lambda$ 是方程的有理矩阵，且 $\boldsymbol{Z}_\lambda$ 和 $\boldsymbol{Z}_\lambda^{-1}$ 的所有极点都位于左半开平面内。$\boldsymbol{J}$ 为常数矩阵，

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

其中两个单位矩阵均具有适当维数。$\boldsymbol{J}$ 称为 $\boldsymbol{\pi}_\lambda$ 的特征矩阵。在给定 J- 谱因子分解(2.53) 的条件下，式(2.51) 可以改写为

$$[\boldsymbol{X}^{\sim}\ \boldsymbol{Y}^{\sim}]\boldsymbol{Z}_\lambda^{\sim}\boldsymbol{J}\boldsymbol{Z}_\lambda\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad s = \mathrm{j}\omega, \quad \omega \in R \tag{2.55}$$

定义方的稳定的有理矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和稳定的有理阵 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \boldsymbol{Z}_\lambda\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

则式(2.55) 等价于

$$\boldsymbol{A}^{\sim}\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{B}^{\sim}\boldsymbol{B} \qquad s = \mathrm{j}\omega \qquad \omega \in R \tag{2.57}$$

由式(2.56) 可得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{Z}_\lambda^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

可见满足 $\| H \|_\infty \leqslant \lambda$ 的所有补偿器 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{-1}$ 可以通过式(2.57) 和式(2.58) 式来计算。满足式(2.57) 的稳定的有理矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 很多，一种选择为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{B} = 0$，这就是人们常说的中心解。下面来验证根据式(2.57) 和式(2.58) 式计算出来的补偿器是否能镇定闭环系统，一个必要条件是 $\det\boldsymbol{A}$ 的所有零点均位于左半开平面内，并且可以进一步证明：如果满足 $\| H \|_\infty < \lambda$ 的镇定补偿器存在，那么所有满足 $\| H \|_\infty \leqslant \lambda$ 的补偿器均可由式(2.57) 和

式(2.58)计算,其中 $\det \boldsymbol{A}$ 的所有根均位于左半开平面。

由前面讨论可得最优解的搜索步骤如下:

① 预定 λ 值。

② 求 J-谱因子 $\boldsymbol{Z}_\lambda$,并根据式(2.57)和式(2.58)计算相应的补偿器,使得 $\det A$ 的所有零点均位于左半开平面内,一种明显的可能是中心解。

③ 验证补偿器是否能镇定闭环系统。若能,则减小 λ,否则增大 λ。

④ 如果已经充分逼近最优解,则停止,否则返回②。

有理 J-谱因子分解式(2.53)可以简化为两个多项式矩阵的 J-谱因子分解,其中一个为分母多项式,另一个为分子多项式。上述搜索过程有两种停止的方法。不常用的方法是不断减小 λ,直到达到某一极小值,当 λ 小于此极小值时,J-谱因子分解不存在。相应于这个极小值 λ 计算出来的次优补偿器就是最优补偿器。常用的方法是减小 λ,直到出现这样一种情况,即当 λ 减至某一值,J-谱因子分解仍存在,但是没有次优解能镇定闭环系统。因此可用搜索方法来确定最优解。结果表明,当接近最优时,J-谱因子分解出现奇异现象,即谱因子 $\boldsymbol{Z}_\lambda$ 的有理函数系数无限增长。同时当 $\lambda = \lambda_{opt}$ 时,中心解的一个闭环极点接近左半平面的界,实际上从左半平面穿越到右半平面,反之亦然。由于闭环传递函数 $\boldsymbol{H}$ 不能具有这样的闭环极点,所以这个极点一定在 $\boldsymbol{H}$ 中抵消了。事实上,这种抵消发生在补偿器 $\boldsymbol{C}(s)$ 中,因此可以被取消。

为了避免 J-谱因子分解出现奇异现象,可以进行部分分解,这种分解可用来精确地计算最优解。奇异现象和抵消现象并不经常发生。如果没有这些现象,则相应于某一特定 λ 的解即为最优解,该特定 λ 是使得 $\det \boldsymbol{\pi}_\lambda$ 具有虚轴上的极点或零点的最大的 λ 值。

上面探讨了 H_∞ 频域解法中常用的 J-谱因子分解法,下面针对图2.10所给出的 H_∞ 标准问题来研究一下它的三个应用,一个是模型匹配问题,一个是跟踪问题,再一个是鲁棒稳定问题。

对于图 2.10,假设 $\boldsymbol{G}$ 为真有理矩阵,且分块矩阵为

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{11} & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

并且有 $z = \boldsymbol{G}_{11}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{G}_{12}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}_{21}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{G}_{22}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{y}$

消去 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 可以得到从 $\boldsymbol{w}$ 到 z 的传递矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为线性分式变换:

$$\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{G}_{11} + \boldsymbol{G}_{12}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}_{22}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{G}_{21}]\boldsymbol{w}$$

为了使问题简化,假设 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}_{22}\boldsymbol{K}$ 对于每一个真有理矩阵 $\boldsymbol{K}$ 都是可逆的。为了更清楚地表明 $\boldsymbol{K}$ 稳定 $\boldsymbol{G}$ 的意义,现假设两个输入 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$,见图 2.11。

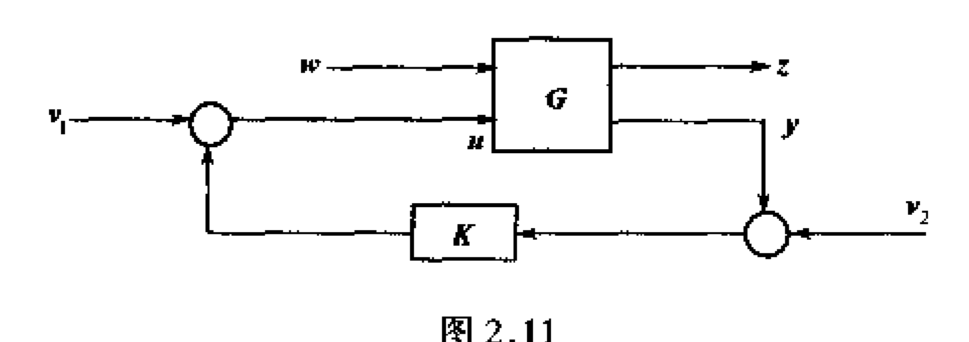


图 2.11

可以证明从 3 个输入 $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 到 3 个输出 $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}$ 的 9 个传递矩阵存在并且为真有理分式,如果它们都属于 H_∞,则 $\boldsymbol{K}$ 镇定 $\boldsymbol{G}$。H_∞ 标准问题可以描述为:找一个真实有理矩阵 $\boldsymbol{K}$,在 $\boldsymbol{K}$ 镇定 $\boldsymbol{G}$ 的情况下,使从 $\boldsymbol{w}$ 到 z 的传递矩阵的 H_∞ 范数极小化。对于 H_∞ 标准问题,下面举三个例子加以说明:

1. 模型匹配问题

见图 2.12,传递函数矩阵 $\boldsymbol{T}_1$ 代表了这样一个模型,它由三个传递函数矩阵的串联 $\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}_3$ 来匹配。这里 $\boldsymbol{T}_i(i = 1 \sim 3)$ 为给定矩阵,控制器 $\boldsymbol{Q}$ 为待设计矩阵。

令 RH_∞ 表示 H_∞ 空间中实有理矩阵空间,即在 $\boldsymbol{R}_e s \geqslant 0$ 内解析,且为稳定的真实有理矩阵空间。设 $\boldsymbol{T}_i \in RH_\infty(i = 1 \sim 3)$ 并要求 $\boldsymbol{Q} \in RH_\infty$。这样图 2.12 中的 4 个方框代表了线性稳定系统。模型匹配准则为

$$\sup\{\|\boldsymbol{z}\|_2 : \boldsymbol{w} \in H_2, \|\boldsymbol{w}\|_2 \leqslant 1\} = \min$$

即误差的能量在单位能量最坏输入 $\boldsymbol{w}$ 作用下被极小化。上述

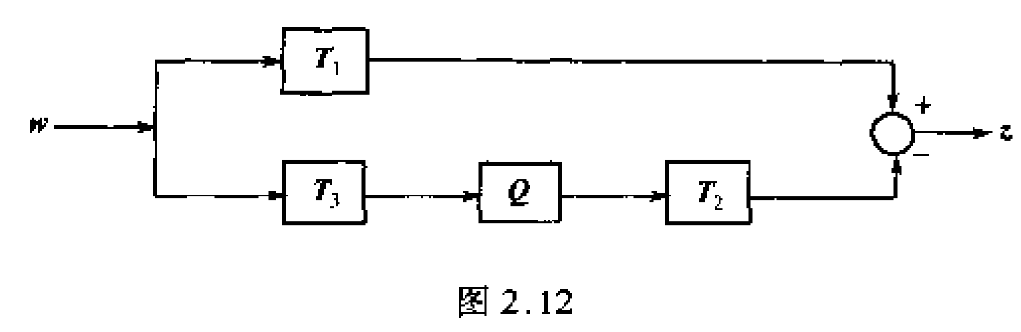


图 2.12

准则等价于

$$\| T_1 - T_2 Q T_3 \|_\infty = \min$$

模型匹配问题可通过定义 $G := \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & 0 \end{bmatrix}$, $K = -Q$, 而转化为标准问题,这里 K 稳定 G 这个约束条件等价于 $Q \in RH_\infty$。

2. 跟踪问题

图2.13表示系统 P 的输出 v 跟踪参考信号 r。系统的输入 u 是 r 和 v 分别通过控制器 C_1 和 C_2 而产生的。这里 r 为一个不确定信号,但是属于下列集合:

$$\{ r : r = Ww, w \in H_2, \| w \|_2 \leqslant 1 \}$$

这里 P 和 W 都是给定的,C_1 和 C_2 为待设计控制器。图 2.13 中的四个方框为真实有理矩阵。

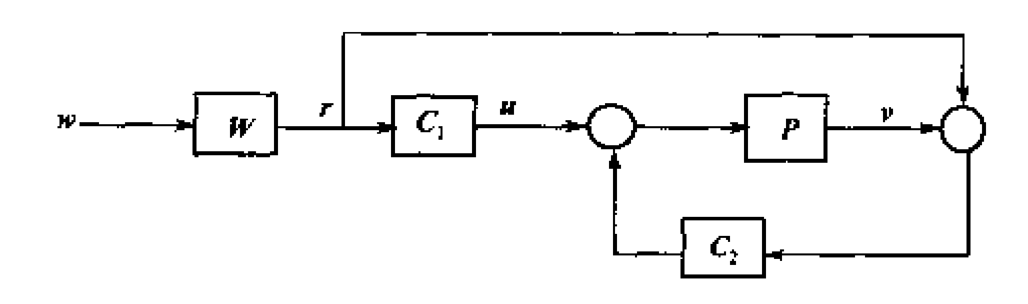


图 2.13

跟踪误差信号为 r-v,评价函数为

$$(\| r-v \|_2^2 + \| \rho u \|_2^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.60}$$

这里 ρ 为正的标量加权因子。注意式(2.60)等价于 $z =$

$\begin{bmatrix} r-v \\ \rho u \end{bmatrix}$的$H_2$范数。跟踪准则为

$$\sup\{\|z\|_2 : w \in H_2, \|w\|_2 \leqslant 1\} \to \min$$

与跟踪问题等价的标准问题为定义

$$y = \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix} \qquad K := [C_1 \; C_2]$$

$$G := \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

$$G_{11} := \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G_{12} := \begin{bmatrix} -P \\ \rho I \end{bmatrix}, \quad G_{21} := \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G_{22} := \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix}$$

3. 式中鲁棒镇定问题

见图 2.14,设 P 为严格有理的标称系统,令 r 为标量值函数,且 $r \in RH_\infty$。定义一族严格真实有理矩阵 $P + \Delta P$ 为 P 的邻域系统,它们与 P 具有相同的右半复平面的极点,并且干扰 ΔP 满足界条件:

$$\sigma_{\max}[\Delta P(j\omega)] < |r(j\omega)| \qquad 对于所有\ \omega \in R$$

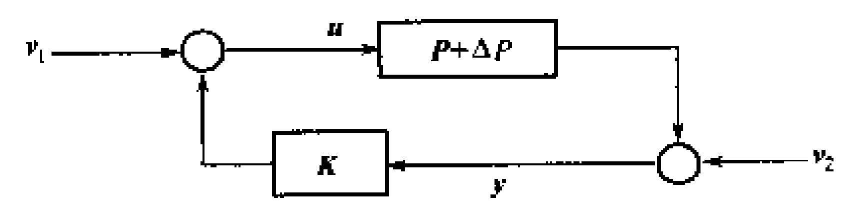


图 2.14

现找到一个真实有理矩阵 K,相应于鲁棒稳定准则,K 能镇定 P 的邻域中的所有系统。

引理 2.2 一个真实有理矩阵 K 能镇定所有 P 的邻域中的系统,当且仅当 K 能镇定标称系统 P 并且有

$$\|rK(I-PK)^{-1}\|_\infty \leqslant 1$$

我们可以通过定义

$$G := \begin{bmatrix} 0 & rI \\ I & P \end{bmatrix}$$

将鲁棒镇定问题转化为标准问题。

前面我们举了控制系统设计中常用到的三个例子，它们都可以转化为相应的标准问题。这样，对于这些标准问题就可以运用前面介绍的 H_∞ 频域算法来进行求解了。

2.2.2 状态空间法

Zames 关于 H_∞ 最优控制理论的原始公式是从输入 - 输出角度考虑的，那时所涉及的解法包括解析函数法和算子理论方法。实际上 H_∞ 理论的提出似乎标志着在控制理论统治了 20 多年的状态空间法的结束，但是 H_∞ 理论的标准频域方法在解 MIMO 系统时却遇到很大障碍。毫无疑问，MIMO 的 H_∞ 控制问题的第一个解是建立在状态空间法基础上的，其步骤如下：

① 首先将所有使系统内部稳定的控制器进行 Youla 参数化；

② 获得闭环传递函数矩阵的实现；

③ 将所得的模型匹配问题转化为等价的 2×2-block 一般干扰或最优估计问题，包括混合 Hankel-Toeplitz 算子；

④ 简化为 Nehari 问题；

⑤ 用 Glover 算法解 Nehari 问题。

从数学角度上来讲，上面这种算法解决了 H_∞ 最优控制问题，但它涉及到特殊的技巧及复杂运算，包括高维的 Riccati 方程。所得的控制器结构非常复杂，并且有较高的状态维数。因此我们的任务是提供一个简单的用系统数据表达的控制器公式。特别是前面的解法中所涉及的 Youla 参数化和 2×2-block 模型匹配问题完全被避免了，而用建立在观测器基础上的补偿器设计的状态空间法来替代。对 2×1-block 问题及分离增益，算子理论将起中心作用。这种方法的关键是又回到了简单的状态空间法，用 Willems 形式，例如完全平方，频域不等式，Riccati 方程和谱分解之间的关系。H_∞ 理论的状态空间法可涉及到很多内容，从一般的时不变系统到时变系统，从有限到无限，从有穷维到无穷维。

1. 基本概念

为了更好地理解状态空间法，首先对一些基本概念做一些解释。

(1) Hardy空间 H_2 和 $H_2^{\perp}$：由在虚轴上平方可积，分别在右半和左半平面内解析连续的函数组成。

(2) Hardy 空间 H_∞：由在右半平面内解析连续的有界函数组成。

(3) Lebesgue 空间 $L_2 = L_2(-\infty,\infty)$，$L_{2+} = L_2[0,\infty)$ 和 $L_{2-} = L_2(-\infty,0]$：分别由在$(-\infty,\infty)$，$(0,\infty)$ 和$[-\infty,0]$上平方可积的函数组成。

这里我们还用到Hilbert空间同构的概念，通过Laplace变换和Parley-Wiener定理，可以得到时域中的 $L_2 = L_{2+} \oplus L_{2-}$ 与频域中 $L_2 = H_2 \oplus H_2^{\perp}$ 同构；L_{2+} 和 H_2 同构；L_{2-} 与 $H_2^{\perp}$ 同构。所有的矩阵和向量都定义在复数域上。用状态空间数据所表达的传递函数矩阵形式为

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right] := \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

对于矩阵 $\boldsymbol{M} \in C^{p\times r}$，$\boldsymbol{M}^{\mathrm{H}}$ 代表它的共轭转置，$\bar{\sigma}(\boldsymbol{M}) = \rho(\boldsymbol{M}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{M})^{\frac{1}{2}}$ 表示它的最大奇异值，$\rho(\boldsymbol{M})$ 表示谱半径，$\boldsymbol{M}^{+}$ 代表 $\boldsymbol{M}$ 的广义逆。Ker 代表核，并 $*$ 代表 Γ 的伴随算子。

假定在图2.15中 $\boldsymbol{G}$ 和$\boldsymbol{K}$ 都是复数真有理矩阵，$\boldsymbol{K}$ 保证系统内部稳定性，从 w 到 z 的传递函数阵用 $\boldsymbol{T}_{zw}$ 表示。带有反馈连结(LFT) 的系统也用 $\boldsymbol{T}_{zw} = T_l(\boldsymbol{G},\boldsymbol{K})$ 表示。系统的内部稳定性定义为：$\boldsymbol{G}$ 和$\boldsymbol{K}$ 的状态在$w = 0$时从任意初始值出发都将趋近于零。这里我们所考虑的问题是找到所有使 $\|\boldsymbol{T}_{zw}\|_\infty < \gamma(\leqslant \gamma)$ 的 $\boldsymbol{K}(s)$。设传递矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的实现形式为

$$\boldsymbol{G}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \hline \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12} \\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_{21} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right]$$

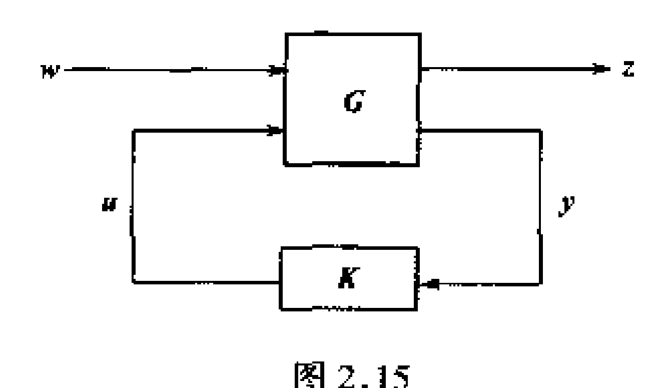


图 2.15

$z(t) \in C^{p_1}, y(t) \in C^{p_2}, w(t) \in C^{m_1}, u(t) \in C^{m_2}, x(t) \in C^n$ 并作如下假设：

① $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}_2)$ 为可镇定的，$(\boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{A})$ 为可检测的；

② $\boldsymbol{D}_{12}$ 为列满秩并且$[\boldsymbol{D}_{12} \quad \boldsymbol{D}_\perp]$为酉矩阵，$\boldsymbol{D}_{21}$ 为行满秩，$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{21} \\ \tilde{\boldsymbol{D}}_\perp \end{bmatrix}$为酉矩阵；

③ $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \mathrm{j}\omega \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_{12} \end{bmatrix}$对于所有 ω 都是列满秩的；

④ $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \mathrm{j}\omega \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_{21} \end{bmatrix}$对于所有 ω 是行满秩的。

假设 ① 是保证稳定控制器存在的必要条件。假设 ② 意味着对于 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}_{12}\boldsymbol{u}$ 的补偿包括一个非奇异标准化的关于控制 $\boldsymbol{u}$ 的补偿和关于外部信号 $\boldsymbol{w}$(系统干扰和传感器噪声）的补偿。对于假设 ② 的放松会导致奇异控制问题。假设 ③ 放松了 DGKF 中 $(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{A})$ 为可测的，$\boldsymbol{D}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1 = 0$ 的要求。④ 的假设放松了$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}_1)$为稳定的，并且 $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_{21}^{\mathrm{T}} = 0$ 的要求。假设 ③ 和 ④ 的提出有技术方面的原因：与 ① 一起保证了 FI 问题中的两个 Hamiltonian 矩阵属于 dom(Ric)。

2. 基础知识

下面考虑一些数学方面的基础知识。

令传递矩阵 $\boldsymbol{G}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right]$，$\boldsymbol{A}$ 是稳定的（所有特征值位于左半平面）。无穷范数 $\|\boldsymbol{G}\|_\infty$ 可以从不同角度提出。设 $\boldsymbol{w} \in L_2$，

考虑输出 $z \in L_2$,标准结果为 $\| G \|_\infty$ 是乘积算子 M_G 的导出范数,或者是 Toeplitz 算子 $P_+ M_G: H_2 \to H_2$ 的导出范数,即

$$\| G \|_\infty = \sup_{w \in BL_2} \| z \|_2 = \sup_{w \in BL_{2+}} \| P_+ z \|_2 = \sup_{w \in BH_2} \| P_+ M_G w \|_2$$

(1)Riccati 算子

令 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ 为复 $n \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ 为 Hermitian 矩阵,定义 $2n \times 2n$ 的 Hamiltonian 矩阵为

$$\boldsymbol{H} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{Q} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

假设 $\boldsymbol{H}$ 在虚轴上无奇异值,它一定有 n 个 $\mathrm{Re}s > 0$ 的特征值。考虑两个 n 维谱子空间 $\mathcal{X}_-(\boldsymbol{H})$ 和 $\mathcal{X}_+(\boldsymbol{H})$。前者是与 $\mathrm{Re}s < 0$ 的特征值对应的不变子空间,后者是与 $\mathrm{Re}s > 0$ 的特征值对应的不变子空间。现找到 $\mathcal{X}_-(\boldsymbol{H})$ 的一组基并将它张成一个矩阵,并将其分块为

$$\mathcal{X}_-(\boldsymbol{H}) = I_m \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2 \in C^{n \times n},$$

$$H \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{T}, \mathrm{Re}\lambda_i(\boldsymbol{T}) < 0, \forall i$$

如果 $\boldsymbol{X}_1$ 为非奇异的,或等价地说 $\mathcal{X}_-(\boldsymbol{H})$ 与 $I_m \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$ 为互补的,我们可得到 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{X}_1^{-1}$,$\boldsymbol{X}$ 由 $\boldsymbol{H}$ 惟一确定,即 $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{X}$ 为一个函数并用 Ric 表示,$\boldsymbol{X} = \mathrm{Ric}(\boldsymbol{H})$。定义域为 dom(Ric),它由 Hamiltonian 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 构成并具有两个特性:(a)$\boldsymbol{H}$ 在虚轴上没有特征值;(b)$\mathcal{X}_-(\boldsymbol{H})$ 与 $I_m \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$ 为互补的。这两个特性又称为稳定性和互补性。

引理 2.3 假设 $\boldsymbol{H} \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric})$,并且 $\boldsymbol{X} = \mathrm{Ric}(\boldsymbol{H})$,有

(a) $\boldsymbol{X}$ 为 Hermitain 矩阵。

(b) $\boldsymbol{X}$ 满足代数 Riccati 方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{R}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Q} = 0$。

(c) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{X}$ 为稳定的。

引理 2.4 假设 $\boldsymbol{H}$ 在虚轴上没有奇异值。$\boldsymbol{R}$ 或者为半正定或

者为半负定的，并且(A,R)为可镇定的，那么 $H\in\mathrm{dom(Ric)}$。

引理 2.5 设 H 的形式为$H=\begin{bmatrix}A & -BB^{\mathrm{T}}\\ -C^{\mathrm{T}}C & -A^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$，其中$(A,B)$为镇定的。$\mathrm{rank}[A^{\mathrm{T}}+\mathrm{j}\omega IC^{\mathrm{T}}]=n$，$\forall\omega$，那么 $H\in\mathrm{dom(Ric)}$，$X=\mathrm{Ric}(H)\geqslant 0$ 并且 $\mathrm{Ker}(X)\subset\mathcal{V}=$ 稳定不可观测子空间。

这里的稳定不可观测子空间是指 A 的稳定不变子空间和(A,C)的不可观测子空间的交集。注意如果$(C,-A)$为可观测的，则有 $\mathrm{Ric}(H)>0$，$\mathrm{Ker}(X)\subset\mathcal{V}\subset\mathrm{Ker}(C)$，等式 $XM=C^{\mathrm{T}}$ 对于 M 来说都是有解的。

我们通常放宽稳定性要求来扩大 Ric 的定义域。即使假设 H 在虚轴上有特征值，它必须在 $\mathrm{Re}s\leqslant 0$ 内至少有 n 个特征值。假设选择一些 n 维的不变子空间用 $\mathcal{X}(H)$ 表示，与 n 个 $\mathrm{Re}s\leqslant 0$ 的特征值对应，并有 $H\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}T$，$\mathrm{Re}\lambda_i(T)\leqslant 0$，$\forall i$，这个子空间不是由 H 惟一确定的，但它仍满足互补性。令 $X=X_2X_1^{-1}$，这个 X 也是 Hermitian 矩阵。这里定义一个新的映射 $\mathrm{Ri}\bar{c}$，定义域为 $\mathrm{dom}(\mathrm{Ri}\bar{c})$。可以通过放宽互补条件来进一步扩大定义域 $\mathrm{Ri}\bar{c}$。对于 $\mathcal{X}(H)$ 的最低要求为 $H\cdot\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}\cdot T$，$\mathrm{Re}\lambda_i(T)\leqslant 0$，$\forall i$，并且 $X_1^HX_2=X_2^HX_1$ 为 Hermitian 矩阵。应该指出这个条件并非依赖于基的选择，定义 $\mathrm{dom}(\overline{\mathrm{Ric}})$ 为使子空间 $\mathcal{X}_-(H)$ 存在并且上面两个条件满足的 H 矩阵。从 $\mathrm{dom}(\overline{\mathrm{Ric}})$ 到 C^{2n} 的 n 维子空间的映射 $\overline{\mathrm{Ric}}$ 并不总是存在的，因为子空间并不是由 H 惟一确定的。同时有 $\mathrm{dom(Ric)}\subset\mathrm{dom}(\mathrm{Ri}\bar{c})\subset\mathrm{dom}(\overline{\mathrm{Ric}})$。如果 $H\in\mathrm{dom(Ric)}$，则 $\mathrm{Ri}\bar{c}$ 和 $\overline{\mathrm{Ric}}$ 为满足条件的映射，$\mathrm{Ric}(H)=\mathrm{Ri}\bar{c}(H)=\overline{\mathrm{Ric}}(H)$。

(2) H_∞ 范数的计算

对于传递函数 $G(s)$，A 为稳定的，定义 Hamiltonian 矩阵

$$H:=\begin{bmatrix}A+BR^{-1}D^{\mathrm{T}}C & BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\\ -C^{\mathrm{T}}(I-DD^{\mathrm{T}})^{-1}C & -(A+BR^{-1}D^{\mathrm{T}}C)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C^{T}C & -A^{T} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -C^{T}D \end{bmatrix} R^{-1} [D^{T}C \quad B^{T}]$$

这里 $$R = I - D^{T}D$$

引理 2.6 ① 令 $\bar{\sigma}(D) < 1$，下列条件为等价的：

(a) $\| G \|_{\infty} < 1$。

(b) H 在虚轴上无特征值。

(c) $H \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric})$。

(d) $H \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric})$ 并且 $\mathrm{Ric}(H) > 0$。

② 令 $\bar{\sigma}(D) \leqslant 1$，下列条件是等价的：

(a) $\| G \|_{\infty} < 1$。

(b) $H \in \mathrm{dom}(\overline{\mathrm{Ric}})$。

(c) $H \in \mathrm{dom}(\overline{\mathrm{Ric}})$，$\overline{\mathrm{Ric}}(H)$ 是惟一的并且 $\overline{\mathrm{Ric}}(H) \geqslant 0$。

证明略。

引理 2.6 揭示了求解 H_{∞} 范数的方法：选择一个正数 γ，检验 $\| G \|_{\infty} < \gamma$，通过计算 H 的奇异值相应地增加或减小 γ。因此 H_{∞} 范数的求解是一个搜索过程。

(3) 混和 Hankel-Toeplitz 算子

有时用 $G(s)$ 的导出范数更加有用，它与下面的状态空间描述有关：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx + Dw \end{cases}$$

这里 A 是稳定的。

首先考虑用输入 $w \in L_{2-}$ 来极大化 $\| P_{+} z \|_2^2$。这实际上是计算 G 的 Hankel 范数的标准问题，它可用 L_c 和 L_0 表示，其中 L_c 和 L_0 满足如下李亚普诺夫方程

$$AL_c + L_cA^{T} + BB^{T} = 0 \qquad A^{T}L_0 + L_0A + C^{T}C = 0 \tag{2.62}$$

引理 2.7

$$\sup_{w \in BL_{2-}} \| P_{+} z \|_2^2 = \sup_{w \in BH_2^{\perp}} \| P_{+} M_G w \|_2^2 = \rho(L_0 L_c)$$

引理 2.8 ① 假设 $\| G \|_\infty < 1$ 并且 $x(0) = x_0$,则有

$$\sup_{w \in L_{2+}} (\| z \|_2^2 - \| w \|_2^2) = x_0^{\mathrm{T}} X x_0$$

② 假设 $\| G \|_\infty \leqslant 1, \bar{\sigma}(D) < 1$, 并且 $x(0) = x_0$, 则有 $\sup\limits_{w \in L_{2+}} (\| z \|_2^2 - \| w \|_2^2) = x_0^{\mathrm{T}} X x_0$

现在假设输入为分块的,即 $B = [B_1 \ B_2]$, $D = [D_1 \ D_2]$, $G(s) = [G_1(s) G_2(s)]$, w 被相应地分块,那么 $\| G \|_\infty < 1$,当且仅当

$$H_W = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C^{\mathrm{T}}C & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ -C^{\mathrm{T}}D_2 \end{bmatrix} R_2^{-1} [D_2^{\mathrm{T}} LCB_2^{\mathrm{T}}] \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric}),$$

$R_2 = I - D_2^{\mathrm{T}} D_2$

定义 $W = \mathrm{Ri\bar{c}}(H_W)$ 是惟一的。令 $w \in W = \left\{ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \middle| \, w_1 \in H_2^{\perp}, w_2 \in L_2 \right\}$,我们的目的是检验 $\sup \| \Gamma_W \|_2 < 1 (\leqslant 1)$, 这里 $\Gamma = P_+ [M_{G1} M_{G2}]$: $W \to H_2$ 的混合 Hankel-Toeplitz 算子。

$$\Gamma \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = P_+ [G_1 G_2] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, w_1 \in H_2^{\perp}, \ w_2 \in L_2$$

注意 Γ 为 Hankel 算子 $P_+ M_{G1} P_-$ 与 Toeplitz 算子 $P_+ M_{G2} P_+$ 的组合。

引理 2.9 ① $\sup \| \Gamma_W \|_2 < 1$ 成立,当且仅当下面两个条件成立:

(a) $H_w \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric})$。

(b) $\rho(WL_c) < 1$。

②$\sup \| \Gamma_W \|_2 \leqslant 1$ 成立,当且仅当下面两个条件成立:

(a) $H_W \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ri\bar{c}})$。

(b) $\rho(WL_c) \leqslant 1$。

下面再介绍一下伴随算子 $\Gamma^*: H_2 \to W$。

$$\Gamma^* z = \begin{bmatrix} P_- (G_1^{\sim} z) \\ G_2^{\sim} z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_- G_1^{\sim} \\ G_2^{\sim} \end{bmatrix} z \tag{2.63}$$

这里 $$P_{-}Gz = P_{-}(Gz) = (P_{-}M_G)z$$

内积：$\langle x_1, x_2\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x_1(j\omega)^* x_2(j\omega)d\omega$

$\Gamma: W \to H_2$ 的伴随算子为 $\Gamma^*: H_2 \to W$，它满足

$$\langle z, \Gamma w\rangle = \langle \Gamma^* z, w\rangle, w \in W, z \in H_2$$

利用上述定义，有

$$\langle z, \Gamma w\rangle = \langle z, P_{+}(G_1 w_1 + G_2 w_2)\rangle = \langle z, G_1 w_1\rangle + \langle z, G_2 w_2\rangle$$
$$= \langle P_{-}(G_1^{\sim} z), w_1\rangle + \langle G_2^{\sim} z, w_2\rangle = \langle \Gamma^* z, w\rangle$$

(4) LFT's 和内矩阵

传递矩阵 $G \in RH_\infty$ 称为内矩阵，当且仅当 $G^{\sim}G = I$，即 $G^*(j\omega)\cdot G(j\omega) = I, \forall\omega$。$G$ 为内矩阵意味着 G 至少有与列相同数目的行。如果 G 为内矩阵，则对于任意 $q \in C^m, w \in L$，有 $\|G(j\omega)q\| = \|q\|, \forall\omega, \|Gw\|_2 = \|w\|_2$。

引理 2.10 假设 $G = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$，$(C, A)$ 为可检测的，并且 $L_0 = L_0^T$，满足 $A^T L_0 + L_0 A + C^T C = 0$，则有

(a) $L_0 \geqslant 0$ 当且仅当 A 是稳定的。

(b) $D^T C + B^T L_0 = 0$ 意味着 $G^{\sim}G = D^T D$。

(c) $L_0 \geqslant 0$，(A, B) 可控，$G^{\sim}G = D^T D$ 意味着 $D^T C + B^T L_0 = 0$。

引理 2.11 考虑如图 2.16 的反馈系统。$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \in RH_\infty$。

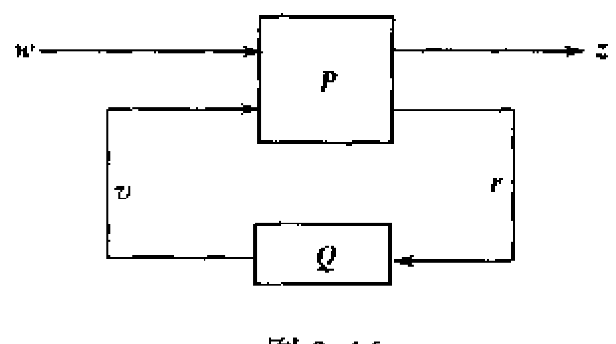


图 2.16

假设 $P^{\sim}P=I, P_{21}^{-1}\in RH_\infty$，并且 Q 为真有理矩阵，那么下面叙述为等价的：

(a) 系统是内部稳定和配置良好的，并且 $\|T_{zw}\|_\infty<1$。

(b) $Q\in RH_\infty$，并且 $\|Q\|_\infty<1$。

(5) LFT's 和稳定性

这里我们考虑如图 2.15 的反馈系统的内部稳定性和输入输出稳定性的等价性。令 $G=\left[\begin{array}{c:c}A & B\\ \hdashline C & D\end{array}\right]$，$A\in C^{n\times n}$，$z, y, w$ 和 u 的维数为 p_1, p_2, m_1 和 m_2，$C_1\in C^{p_1\times n}$，$B_2\in C^{n\times m_2}$。

引理 2.12 假设

(a) 当 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A-\lambda I & B_2\\ C_1 & D_{12}\end{bmatrix}=n+m_2, \forall \operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$。

(b) 当 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A-\lambda I & B_1\\ C_2 & D_{21}\end{bmatrix}=n+p_2, \forall \operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$。

K 使图 2.15 所示闭环系统内部稳定的充分条件为 $T_{zw}\in RH_\infty$。

3. 全信息和全控制问题

H_∞ 解包含两个 Hamitonian 矩阵，H_∞ 和 J_∞ 定义为：

$$R:=D_{1.}^{\mathrm{T}}D_{1.}-\begin{bmatrix}r^2I_{m1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad D_{1.}=[D_{11}\quad D_{12}]$$

$$\tilde{R}:=D_{.1}D_{.1}^{\mathrm{T}}-\begin{bmatrix}r^2I_{p1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad D_{.1}=\begin{bmatrix}D_{11}\\ D_{21}\end{bmatrix}$$

$$H_\infty:=\begin{bmatrix}A & 0\\ -C_1^{\mathrm{T}}C_1 & -A^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}B\\ -C_1^{\mathrm{T}}D_{1.}\end{bmatrix}R^{-1}[D_{1.}^{\mathrm{T}}C_1\quad B^{\mathrm{T}}]\tag{2.64}$$

$$J_\infty:=\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}} & 0\\ -B_1B_1^{\mathrm{T}} & -A\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}C^{\mathrm{T}}\\ -B_1D_{.1}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\tilde{R}^{-1}[D_{.1}B_1^{\mathrm{T}}\quad C]\tag{2.65}$$

如果 $H_\infty\in\operatorname{dom}(\overline{\mathrm{Ric}})$，令 X_1, X_2 为任意矩阵，满足：

$$\boldsymbol{H}_{\infty}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{T}_X,\quad \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_1,\mathrm{Re}\lambda_i(\boldsymbol{T}_X)\leqslant 0,\forall i \tag{2.66}$$

同理,如果 $\boldsymbol{J}_{\infty}\in \mathrm{dom}(\overline{\mathrm{Ri}\,\overline{\mathrm{c}}})$,令 $\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2$ 为任意矩阵,满足:

$$\boldsymbol{J}_{\infty}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{T}_Y,\quad \boldsymbol{Y}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y}_2=\boldsymbol{Y}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Y}_1,\quad \mathrm{Re}\lambda_i(\boldsymbol{T}_Y)\leqslant 0,\forall i \tag{2.67}$$

如果 $\boldsymbol{H}_{\infty}\in \mathrm{dom}(\mathrm{Ri\bar{c}})$ 或 $\boldsymbol{J}_{\infty}\in \mathrm{dom}(\mathrm{Ri\bar{c}})$,定义

$$\boldsymbol{X}_{\infty}:=\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{X}_1^{-1},\qquad \boldsymbol{Y}_{\infty}:=\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{Y}_1^{-1} \tag{2.68}$$

最后定义,状态反馈和输出预测矩阵为

$$\boldsymbol{F}:=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_1\\ \boldsymbol{F}_2\end{bmatrix}=-\boldsymbol{R}^{-1}[\boldsymbol{D}_{1.}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{\infty}] \tag{2.69}$$

$$\boldsymbol{L}:=[\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2]=-[\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_{.1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}_{\infty}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]\widetilde{\boldsymbol{R}}^{-1} \tag{2.70}$$

下面讨论全信息反馈情况。在全信息问题中 $\boldsymbol{G}$ 具有如下形式:

$$\boldsymbol{G}(s)=\left[\begin{array}{c:cc}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \hdashline \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12}\\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\end{array}\right]\qquad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix} \tag{2.71}$$

并作如下假设:① $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}_2)$ 为可镇定的;② $\boldsymbol{D}_{12}$ 为列满秩,$[\boldsymbol{D}_{12}\boldsymbol{D}_{\perp}]$ 为酉矩阵;③ $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_{12}\end{bmatrix}$ 为列满秩,$\forall\omega$。

定理 2.3 假设 $\boldsymbol{G}$ 如上式所给出,并满足假设条件 ① ~ ③,则有

(a) $\exists \boldsymbol{K}$ 使 $\|\boldsymbol{T}_{zw}\|_{\infty}<1\Leftrightarrow \boldsymbol{H}_{\infty}\in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric}),\mathrm{Ric}(\boldsymbol{H}_{\infty})\geqslant 0$。

(b) 如果 $\bar{\sigma}(\boldsymbol{D}_{\perp}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{11})<1$,则 $\exists \boldsymbol{K}$ 使 $\|\boldsymbol{T}_{zw}\|_{\infty}\leqslant 1\Leftrightarrow \boldsymbol{H}_{\infty}\in \mathrm{dom}(\overline{\mathrm{Ri}\,\overline{\mathrm{c}}},)\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{X}_1\geqslant 0$。

(c) $\|\boldsymbol{T}_{zw}\|_{\infty}<1$ 的所有 $\boldsymbol{K}(s)$ 使由下式给定:

$$K(s) = [-Q(s)I]\begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ T_2 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 & -I \\ F_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q \in R_c H_\infty \qquad \| Q \|_\infty < 1$$

证明：必要性。

(a) 如果存在一个允许的控制器使 $\| T_{zw} \|_\infty < 1$，那么 $H_\infty \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric}), \mathrm{Ric}(H_\infty) \geqslant 0$。

(b) 如果存在一个允许的控制器使 $\| T_{zw} \|_\infty \leqslant 1$，那么 $H_\infty \in \mathrm{dom}(\overline{\mathrm{Ric}}), X_1^H X_2 = X_2^H X_1 \geqslant 0$。

首先考虑

$$H_\infty := \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^T C_1 & A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ -C_1^T D_{1.} \end{bmatrix} T^{-1} J^{-1} T^{T-1} [D_{1.}^T C_1, B^T]$$

T, J 满足

$$R = \begin{bmatrix} T_1^T & T_2^T \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ T_2 & I \end{bmatrix} = T^T J T$$

$$D_{1.} T^{-1} = [D_{11} D_{12}^T T_2 T_1^{-1}, D_{12}]$$

$$BT^{-1} = [(B_1 - B_2 T_2) T_1^{-1}, B_2] = [\tilde{B}_1 B_2] \qquad (2.72)$$

$$\begin{aligned} I - D_{1.} R^{-1} D_{1.}^T &= I - D_{12} D_{12}^T + D_\perp D_\perp^T D_{11} T_1^{-1} (T_1^T)^{-1} D_{11}^T D_\perp D_\perp^T = \\ &D_\perp (I + D_\perp^T D_{11} (T_1^T T_1)^{-1} D_{11}^T D_\perp) D_\perp^T = \\ &D_\perp S^{-1} D_\perp^T \end{aligned} \qquad (2.73)$$

这里
$$S = I - D_\perp^T D_{11} D_{11}^T D_\perp > 0$$

$$H_\infty = \begin{bmatrix} N & -B_2 B_2^T + \tilde{B}_1 \tilde{B}_1^T \\ -C_1^T D_\perp S^{-1} D_\perp^T C_1 & -N^T \end{bmatrix}$$

$$N = A - B_2 D_{12}^T C_1 + \tilde{B}_1 (T_1^T)^{-1} D_{11}^T D_\perp D_\perp^T C_1$$

不失一般性，假设$(D_\perp^T C_1, -N)$为可检测的，这样就简化了证明。然后假设$(D_\perp^T C_1, -N)$为不可检测的或等价地$(D_\perp^T C_1, -A + B_2 D_{12}^T C_1)$为不可检测的，也就是说$(A - B_2 D_{12}^T C_1)$有不稳定模态从 $D_\perp^T C_1$ 是无法观测到的。假如我们进行状态坐标变换就有

$$\left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C_1 & D_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:cc} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{21} \\ A_{21} & A_{22} & B_{12} & B_{22} \\ \hdashline C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \end{array}\right]$$

$A_{12} - B_{21}D_{12}^{T}C_{12} = 0$, $D_{\perp}^{T}C_{12} = 0$, $(D_{\perp}^{T}C_{11} \quad - A_{11} + B_{21}D_{12}^{T}C_{11})$ 可检测，

$(A_{22} - B_{22}D_{12}^{T}C_{12})$ 可镇定，这样带有 $K = \left[\begin{array}{c:c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hdashline \hat{C} & \hat{D} \end{array}\right]$ 的系统状态方程可写成

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + B_{11}w + B_{21}(D_{12}^{T}C_{12}x_2 + u)$$

$$z = C_{11}x_1 + D_{11}w + D_{12}(D_{12}^{T}C_{12}x_2 + u)$$

$$\dot{x}_2 = A_{22}x_2 + A_{21}x_1 + B_{12}w + B_{22}u$$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}_1x_1 + \hat{B}_2x_2 + \hat{B}_3w$$

$$u + D_{12}^{T}C_{12}x_2 = \hat{C}\hat{x}_2 + \hat{D}_1x_1 + \hat{D}_2x_2 + \hat{D}_3w + D_{12}^{T}C_{12}x_2$$

如果控制器 K 是允许的，并且 $\|F_l(G,K)\|_\infty < 1(\leqslant 1)$。上述状态方程表明子系统 $G_1 = \left[\begin{array}{c:cc} A_{11} & B_{11} & B_{21} \\ \hdashline C_{11} & D_{11} & D_{12} \end{array}\right]$ 具有允许控制器 K_1 满足 $\|F_l(G_1,K_1)\|_\infty < 1$。进一步，假设我们找到一个稳定不变子空间 $\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$ 为 G_1 的 Hamiltonian 矩阵，选择矩阵 $\begin{bmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & I \\ x_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，对于 G 是合适的，因为 $(A_{22} - B_{22}D_{12}^{T}C_{12})$ 是稳定的。

下面我们将假设 $(D_{\perp}^{T}C_1, -A + B_2D_{12}^{T}C_1)$ 为可观测的。

证明需要将变量进行初等变换：$v = u - F_0x$。这个变换不会改变内部稳定性和所得范数。因为状态是可观测的。矩阵 F_0 为最优状态反馈矩阵。

由引理 2.5，Hamiltonian 矩阵 $H_0 \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric})$，因为 (A_1, B_2) 是可镇定的。

$$H_0 = \begin{bmatrix} A - B_2D_{12}^{\mathrm{T}}C_1 & -B_2B_2^{\mathrm{T}} \\ -C_1^{\mathrm{T}}D_\perp D_\perp^{\mathrm{T}} C_1 & -(A - B_2D_{12}^{\mathrm{T}}C_1)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

并且 $X_0 = \mathrm{Ric}(H_0) > 0$,因为$(D_\perp^{\mathrm{T}} C_1, -A + B_2D_{12}^{\mathrm{T}}C_1)$是可观测的。

定义:$F_0 = -(D_{12}^{\mathrm{T}}C_1 + B_2^{\mathrm{T}}X_0)$,$A_{F_0} = A + B_2F_0$,$C_{1F_0} = C_1 + D_{12}F_0$

$$G_c(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{F0} & B_1 \\ \hline C_{1F0} & D_{11} \end{array}\right]$$

假设 $D_\perp$ 为使任意$[D_{12}\ D_\perp]$为正交阵的矩阵,定义

$$[U\ U_\perp] = \left[\begin{array}{c|cc} A_{F0} & B_2 & -X_0^{-1}C_1^{\mathrm{T}}D_\perp \\ \hline C_{1F0} & D_{12} & D_\perp \end{array}\right] \tag{2.74}$$

从 w 和 v 到 z 的传递函数为

$$z = \left[\begin{array}{c|cc} A_{F0} & B_1 & B_2 \\ \hline C_{1F0} & D_{11} & D_{12} \end{array}\right]\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = G_cw + Uv$$

引理 2.13 $[U\ U_\perp]$为方阵和内矩阵,$G_c^{\sim}[U\ U_\perp]$的实现为

$$G_c^{\sim}[U\ U_\perp] = \left[\begin{array}{c|cc} A_{F0} & B_2 & -X_0^{-1}C_1^{\mathrm{T}}D_\perp \\ \hline B_1^{\mathrm{T}}X_0 + D_{11}^{\mathrm{T}}C_{1F0} & D_{11}^{\mathrm{T}}D_{12} & D_{11}^{\mathrm{T}}D_\perp \end{array}\right] \subset RH_2 \tag{2.75}$$

这意味着 U 和 $U_\perp$ 互为内矩阵,$U_\perp^{\sim}G_c$ 和 $U^{\sim}G_c \in RH_2^{\perp}$。

$\min\limits_{v\in L_{2+}} \|z\|_2 \leqslant 1$,那么 $H_\infty \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric})$,并且 $X_1^{\mathrm{T}}X_2 = x_2^{\mathrm{T}}x_1 \geqslant 0$

这样就完成了必要性的证明。

充分性:所有满足使 $\|T_{zw}\|_\infty < 1$ 的 $K(s) = [-Q(s)I]\begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ T_2 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 & -I \\ F_2 & 0 \end{bmatrix}$。有 $Q \in RH_\infty$,$\|Q\|_\infty < 1$。

首先进行变量代换,将输入变量变为

$$v = u + F_2w - [T_2I]Fx$$

$$K_{tmp}(s) = K(s) + [-[T_2I]FT_2],$$

状态方程为

$$\dot{x} = A_F x + (B_1 - B_2 T_2) w + B_2 v$$
$$z = C_{1F} x + D_{\perp} D_{\perp}^{T} D_{11} w + D_{12} v$$
$$A_F := (A + B_2[T_2 I]F); C_{1F} = C_1 + D_{12}[T_2 I]F$$

定义新的反馈变换：$r = T_1(w - F_1 x)$，并假设：

$$K_{tmp}(s) = Q(s) T_1[-F_1 I]，即\ v = Qr$$

则有 $P^{\sim} P = I$，因为

$$\| z \|_2^2 - \| w \|_2^2 = \| v \|_2^2 - \| r \|_2^2$$

$$P = \left[\begin{array}{c|cc} A_F & B_1 - B_2 T_2 & B_2 \\ \hline C_1 F & D_{\perp} D_{\perp}^{T} D_{11} & D_{12} \\ -T_1 F_1 & T_1 & 0 \end{array}\right]$$

引理 2.14 $P \in RH_{\infty}, P^{\sim} P = I$ 并且 $P_{21}^{-1} \in RH_{\infty}$。

这样就完成充分性的证明。

到此为止，我们可以看到，根据定理 2.3 可以对一个系统利用 H_{∞} 状态空间法进行鲁棒性设计了。

第 3 章　离散时间系统的 H_∞ 理论

在第 2 章中，我们主要是以连续时间系统作为研究对象，深入探讨了 H_∞ 有关理论。本章则是从离散时间系统出发，对 H_∞ 理论作进一步研究。

3.1　概　　述

考虑线性离散时间系统

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 w(k) + B_2 u(k) \\ z(k) &= Cx(k) + D_1 w(k) + D_2 u(k) \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

其中 $x \in R^n, w \in R^{m_1}, u \in R^{m_2}, z \in R^p$ 分别代表状态、干扰、控制输入和受控输出。

当 $y(k) = x(k)$（完全可观测）的情况下，H_∞ 控制问题实质上是寻找使 $\| G_{zw}(z,K) \|_\infty < \gamma$ 成立的稳定反馈控制器 $u(k) = Kx(k)$ 存在的充分必要条件，这里

$$\| G_{zw}(z,K) \|_\infty =$$

$$\| (C + D_2 K)(zI - A - B_2 K)^{-1} B_1 + D_1 \|_\infty \quad \gamma > 0$$

式中 $\| \ \|_\infty$ 代表 H_∞ 范数。现假设(C, A)是可检测的，并且

$$D_2^T C = 0 \quad , \quad D_2^T D_2 = I \quad , \quad D_1 = 0$$

那么上述问题的解是如下 Riccati 方程的非负定解 P 的存在性问题：

$$P = C^T C + A^T PA + A^T P[I + (B_2 B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T) P]^{-1} A$$

使 $A + B_1 F_1 + B_2 F_2$ 是稳定的。

其中 $$F_1 = \frac{1}{\gamma}B_1^{\mathrm{T}}P[I + (B_2B_2^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^{\mathrm{T}})P]^{-1}A$$

$$F_2 = -B_2^{\mathrm{T}}P[I + (B_2B_2^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^{\mathrm{T}})P]^{-1}A$$

定义线性映射 $G_k: l^2(0,\infty;R^{m_1}) \rightarrow l^2(0,\infty;R^P)$

$$(G_kw)(k) = (C + D_2K)\sum_{j=0}^{k-1}(A + B_2K)^{k-j-1}B_1(j)w(j) + D_1(k)w(k)$$

那么 $\|G_k\| = \|G_{zw}(z,K)\|_\infty$。这里 $l^2(0,\infty;R^{m_1})$ 表示 $(0,\infty)$ 离散区间上的 m_1 维平方可和的向量函数构成的集合。在这一章中我们主要考虑时变情况。假定式(3.1)中的矩阵都是时间的函数并且定义了输入一输出算子 G_k。现在的任务主要是找到满足 $\|G_k\| < \gamma$ 的稳定控制器 $u(k) = K(k)y(k)$ 存在的充分必要条件。我们称 $u(k) = K(k)x(k)$ 是允许的，如果 $(A + B_2K)(k)$ 的基本解是指数稳定的。

在 3.2 节中将给出与算子范数相关的基本结论。在 3.3 节中将考虑与 H_∞ 控制相关的二次规划，在满足凸性、凹性和强制条件的假设下，鞍点将由 Riccati 方程表达出来。在 3.4 节中将考虑 H_∞ 问题，并给出 Riccati 方程的有界非负定解存在的充分必要条件。充分性部分的证明用到了 3.3 节中二次规划的一些结论。必要性部分的证明满足条件 $D_2^{\mathrm{T}}(k)C(k) = 0$。

3.2 基本理论

考虑如下定义的系统

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)w(k), x(i) = x_0 \\ z(k) &= C(k)x(k) + D(k)w(k) \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

这里 $x \in R^n, w \in R^{m_1}, z \in R^P$，并且矩阵都是 k 的有界函数。$x_0 = 0$，由式(3.2)产生的因果线性算子 G_i 满足映射 $l_{loc}^2(i,\infty;R^{m_1})$ 到 $l_{loc}^2(i,\infty;R^P)$，

$$(\boldsymbol{G}_i w)(k)=\boldsymbol{C}(k)\sum_{j=i}^{k-1}\boldsymbol{S}(k,j+1)\boldsymbol{B}(j)w(j)+\boldsymbol{D}(k)w(k) \tag{3.3}$$

式中 $\boldsymbol{S}(k,j)$ 是与 $\boldsymbol{A}(k)$ 相关的基本解：

$$\boldsymbol{S}(k,j)=\begin{cases}\boldsymbol{A}(k-1)\boldsymbol{A}(k-2)\cdots\boldsymbol{A}(j) & , \quad k>j\\ I & , \quad k=j\end{cases}$$

这里 $l_{loc}^2(i,\infty;R^{m_1})$ 表示(i,∞) 离散区间上的局部平方可和的 m_1 维向量值函数组成的集合。

定义 3.1 系统(3.2) 称为是指数稳定的，假如存在 $1\leqslant\alpha<\infty$，$0<\beta<1$ 满足 $\|\boldsymbol{S}(k,j)\|\leqslant\alpha\beta^{k-j}$，对于所有的 $k>j$。在这种情况下，$\boldsymbol{A}$ 称为是稳定的。

如果系统是指数稳定的，那么输入一输出算子 G_i 是从 $l^2(i,\infty;R^{m_1})$ 到 $l^2(i,\infty;R^p)$ 的有界线性映射算子。

定义 3.2 $(\boldsymbol{C}(k),\boldsymbol{A}(k))$ 称为是可检测的，假如存在有界函数 $\boldsymbol{L}(k)$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC}$ 是稳定的。

我们假设 $\boldsymbol{A}$ 是稳定的。定义

$$J(\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)=\sum_{k=i}^{\infty}\{|\boldsymbol{z}(k)|^2-\gamma^2|\boldsymbol{w}(k)|^2\} \quad , \quad \gamma>0 \tag{3.4}$$

考虑式(3.2) 约束下，式(3.4) 的极大化问题。在 $l^2(i,N;R^{m_1})$ 上，令

$$(\boldsymbol{G}_{N_i}\boldsymbol{w})(k)=\boldsymbol{C}(k)\sum_{j=i}^{k-1}\boldsymbol{S}(k,j+1)\boldsymbol{B}(j)\boldsymbol{w}(j)+\boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{w}(k)$$

我们考虑与式

$$J_{N_i}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)=\sum_{k=i}^{N}\{|\boldsymbol{z}(k)|^2-\gamma^2|\boldsymbol{w}(k)|^2\} \quad , \quad \gamma>0 \tag{3.5}$$

相关的有限界问题。

引理 3.1 $\|\boldsymbol{G}_{N_i}\|\leqslant\|\boldsymbol{G}_i\|$，$i\leqslant N<\infty$。

引理 3.2 假设 $\|G_i\| < \gamma$,那么 $J_{N_i}(w;x_0)(J(w;x_0))$ 是严格凹的,并且存在惟一的控制 $w_{N_i}(w_i)$ 极大化 $J_{N_i}(w;x_0)(J(w;x_0))$。进一步有

$$\left.\begin{array}{ll}\|w_{N_i}\|_2 \leqslant \delta\,|x_0| , & \|w_i\|_2 \leqslant \delta\,|x_0| \\ J_{N_i}(w_{N_i};x_0) \leqslant \delta\,|x_0|^2 , & J(w_i;x_0) \leqslant \delta\,|x_0|^2, \\ \delta = \delta(\gamma) \text{ 与 } N \text{ 和 } x_0 \text{ 不相关} & \end{array}\right\} \tag{3.6}$$

引理 3.3 $\|G_{N_i}\| < \gamma, \gamma > 0$ 当且仅当存在非负定序列 $P_N(k) \in R^{n\times n}, k = i,\cdots,N+1$,满足

$$\left.\begin{array}{l}T_N(k) > 0 \\ P_N(k) = C^{\mathrm{T}}(k)C(k) + A^{\mathrm{T}}(k)P_N(k+1)A(k) + \\ \qquad\qquad R_N^{\mathrm{T}}(k)T_N^{-1}(k)R_N(k) \\ P_N(N+1) = 0\end{array}\right\} \tag{3.7}$$

式中 $T_N(k) = \gamma^2 I - D^{\mathrm{T}}(k)D(k) - B^{\mathrm{T}}(k)P_N(k+1)B(k)$

$R_N(k) = D^{\mathrm{T}}(k)C(k) + B^{\mathrm{T}}(k)P_N(k+1)A(k)$

$J_{N_i}(w,x_0)$ 的最优控制律由如下的反馈律给出:

$$\hat{w}_N(k) = T_N^{-1}(k)R_N(k)x(k) \tag{3.8}$$

并且 $$J_{N_i}(\hat{w}_N) = x_0^{\mathrm{T}}P_N(i)x_0$$

以下给出的结论将算子 G_i 同无限界 Riccati 方程联系起来。

引理 3.4 $\|G_i\| < \gamma$,当且仅当存在一致有界序列 $P(k), k = i, i+1,\cdots$,满足

$$\begin{array}{l}T(k) = T(k) > 0 \\ P(k) = C^{\mathrm{T}}(k)C(k) + A^{\mathrm{T}}(k)P(k+1)A(k) + \\ \qquad\qquad R^{\mathrm{T}}(k)T^{-1}(k)R(k)\end{array} \tag{3.9}$$

$A + BT^{-1}R$ 是稳定的。

式中 $T(k) = \gamma^2 I - D^{\mathrm{T}}(k)D(k) - B^{\mathrm{T}}(k)P(k+1)B(k)$

$R(k) = D^{\mathrm{T}}(k)C(k) + B^{\mathrm{T}}(k)P(k+1)A(k)$

进一步，如果上述条件满足，$J(w;x_0)$ 的惟一极大化元素 $\hat{w}_i$ 存在并且由下列反馈律给出：

$$\hat{w}_i(k) = T^{-1}(k)R(k)x(k)$$

并且
$$J(\hat{w}_i;x_0) = x_0^{\mathrm{T}}P(i)x_0$$

证明：① 必要性。由于 $\|G_i\| < \gamma$ 意味着 $\|G_{N_i}\| < \gamma$，由引理3.3可以得到满足式(3.7)的非负定序列 $P_N(k)$。并且对于每一个 k，$P_N(k)$ 相对于 N 是单调递增的。并注意到 $P_N(k)$ 相对于 N 是一致有界的，这是由式(3.6)和 $J_{N_i}(\hat{w}_N;x_0) - x_0P_N(i)x_0$ 得到的。所以 $P_N(i)$ 收敛到有限 $P(i)$ 处。下面我们将证明 $P(k)$ 满足 $T(k) > 0$ 和式(3.9)中的 Riccati 方程。由引理3.3有

$$x_0^{\mathrm{T}}P_N(i)x_0 = J_{N_i}(\hat{w}_N;x_0) \leqslant J_i(\bar{w}_N;x_0) \leqslant J_i(w_i;x_0) = \max_w J_i(w;x_0)$$

并且

$$x_0^{\mathrm{T}}P(i)x_0 = \lim_{N\to\infty} J_{N_i}(\hat{w}_N;x_0) \leqslant \lim_{N\to\infty} J_i(\hat{w}_N;x_0) \leqslant J_i(w_i;x_0) = \max_w J_i(w;x_0)$$

这里 $\bar{w}_N$ 是将 $\hat{w}_N$ 扩展到$[i,\infty)$，并且 w_i 是$J_i(w;x_0)$ 的极大元素。另一方面，

$$J_{N_i}(\bar{w}_N;x_0) \leqslant J_{N_i}(\hat{w}_N;x_0) = x_0^{\mathrm{T}}P_N(i)x_0$$

并且因为 $J_i(w_i;x_0) \leqslant x_0^{\mathrm{T}}P(i)x_0$，这里 $\bar{w}_i$ 将 w_i 限制于$[i,N]$，我们就有$\max_w J_i(w;x_0) = x_0^{\mathrm{T}}P_N(i)x_0$。现在令 $V_j(x) = \max_w J_j(w;x)$，由贝尔曼优化准则，有

$$\begin{aligned}V_j(x) &= \max_w\{|C(j)x + D(j)w|^2 - \gamma^2|w|^2 + \\ &\quad V_{j+1}(A(j)x + B(j)w)\} = \max_w\{x^{\mathrm{T}}[C^{\mathrm{T}}(j)C(j) + \\ &\quad A^{\mathrm{T}}(j)P(j+1)A(j)]x + \\ &\quad 2x^{\mathrm{T}}R(j)w - w^{\mathrm{T}}T(j)w\}\end{aligned}$$

因为右式有惟一极大值，$T(j) > 0$，就得到式(3.9)。

下面接着证明 $A + BT^{-1}R$ 是稳定的。令 $x_N(k)$ 是相对于

$\hat{w}_N(k)$ 的响应，并令 $\tilde{w}_N(\cdot) \in l^2(i,\infty;R^{m_1})$

$$\tilde{w}_N(k) = \begin{cases} T^{-1}(k)R(k)x_N(k) & , \quad k \in [i,N] \\ 0 & , \quad k \in [N,\infty] \end{cases}$$

那么有 $0 \leqslant x_0^{\mathrm{T}} P_N(i) x_0 \leqslant J(\tilde{w};x_0) \leqslant J(w_i;x_0)$，并且 $\{\tilde{w}_N\}$ 在 $l^2(i,\infty;R^{m_1})$ 上是有界的。因此存在子序列仍用 $\{\tilde{w}_N\}$ 表示弱收敛到 $\tilde{w}(\cdot) \in l^2(i,\infty;R^{m_1})$。令 $\tilde{x}(k)$ 是相对于 $\tilde{w}(k)$ 的响应，即为下列方程的解：

$$\tilde{x}(k+1) = A(k)\tilde{x}(k) + B(k)\tilde{w}(k) \quad , \quad \tilde{x}(i) = x_0$$

由于在任意子区间上的 $\tilde{w}_N(k)$ 都弱收敛到 $\tilde{w}(k)$，$x_N(k) \to \tilde{x}(k)$，对于每一个 k，$N \to \infty$。另一方面，在任意有限区间上 $x_N(k) \to \bar{x}(k)$，这里 $\bar{x}(k)$ 是下列方程的解：

$$\bar{x}(k+1) = (A + BT^{-1}R)(k)\bar{x}(k) \quad , \quad \bar{x}(i) = x_0$$

所以能够得到 $\tilde{x}(k) = \bar{x}(k)$。因为 A 是稳定的，并且 $\tilde{w}(\cdot) \in l^2(i,\infty;R^{m_1})$，就可归纳出 $\tilde{x}(\cdot) \in l^2(i,\infty;R^n)$，$x(\cdot) \in l^2(i,\infty;R^n)$ 这对于任意的 x_0 都是成立的，则 $A + BT^{-1}R$ 是稳定的。

证毕。

② 充分性：充分性的证明与连续时间系统的情况相同(略)。

3.3 二次规划

3.3.1 有限界问题

考虑下式所定义的二次规划问题

$$\left.\begin{aligned} & x(k+1) = A(k)x(k) + B_1(k)w(k) + B_2(k)u(k) \\ & x(i) = x_0 \\ & z(k) = C(k)x(k) + D_1(k)w(k) + D_2(k)u(k) \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

代价函数为

$$J_{N_i}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)=\sum_{k=i}^{N}\{|\boldsymbol{z}(k)|^2-\gamma^2|\boldsymbol{w}(k)|^2\} \quad (3.11)$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n,\boldsymbol{w}\in R^{m_1},\boldsymbol{u}\in R^{m_2},\boldsymbol{A}(k),\boldsymbol{B}_1(k),\boldsymbol{B}_2(k),\boldsymbol{C}(k),\boldsymbol{D}_1(k),\boldsymbol{D}_2(k)$ 是相应维数的矩阵。假设($H1$):$\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{D}_2(k)\geqslant d\boldsymbol{I},d>0$。$\boldsymbol{u}(\cdot)\in l^2(i,N;R^{m_2})(\boldsymbol{w}(\cdot)\in l^2(i,N;R^{m_1}))$ 是取极小值项(取极大值项)。对于式(3.10) 给出输入 — 输出算子 $\boldsymbol{G}_{N_i}$,假设($H2$):$\|\boldsymbol{G}_{N_i}\|<\gamma$,并考虑在二次规划下所能得到的有关结论。同在连续时间情况下一样,我们得到与式(3.11) 相关的三个等价的 Riccati 方程:

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\quad \boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(k)+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}(k)-\\
&\qquad\qquad \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}_2+\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_1^{\ 1}\boldsymbol{R}_1(k)\\
&\qquad \boldsymbol{P}(N+1)=0\\
&(2)\quad \boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(k)+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}(k)-\\
&\qquad\qquad \boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2(k)+\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}_1+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{S})\boldsymbol{F}_1\\
&\qquad \boldsymbol{P}(N+1)=0\\
&(3)\quad \boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}(k)+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}(k)-\\
&\qquad\qquad \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_2\\
&\qquad \boldsymbol{P}(N+1)=0
\end{aligned}\right\} \quad (3.12)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}_1(k)=\gamma^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1(k)-\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{B}_1(k)>0\\
&\boldsymbol{T}_2(k)=\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2(k)+\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{B}_2(k)>0\\
&\boldsymbol{R}_1(k)=\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(k)+\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}(k)\\
&\boldsymbol{R}_2(k)=\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(k)+\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}(k)\\
&\boldsymbol{S}(k)=\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1(k)+\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{B}_1(k)\\
&\boldsymbol{F}_2=-(\boldsymbol{T}_2+\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{R}_2+\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})(k)\\
&\boldsymbol{F}_1=(\boldsymbol{T}_1+\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2)(k)
\end{aligned}\right\} \quad (3.13)$$

为了给出式(3.12)Riccati方程的鞍点和解存在的充分条件，最好是考虑如下两个Riccati方程：

$$
\left.\begin{aligned}
(1)\boldsymbol{P}_1(k) &= \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}(k) + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}_1(k+1)\boldsymbol{A}(k) + \\
&\quad \boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{R}_1(k) \\
\boldsymbol{P}_1(N+1) &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.14}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
(2)\boldsymbol{P}_2(k) &= \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}(k) + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}_2(k+1)\boldsymbol{A}(k) - \\
&\quad \boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2(k) \\
\boldsymbol{P}_2(N+1) &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{3.15}
$$

前一个方程对应于在 $\boldsymbol{u}(k)=0$ 的情况下式(3.11)的极大化问题，并有

$$
\begin{aligned}
J_{1N_i}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0) = \sum_{k=i}^{N}\{|\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k)|^2 + 2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k) - \\
\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(k)(\gamma^2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1)(k)\boldsymbol{w}(k)\}
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

后一个方程对应于在 $\boldsymbol{w}(k)=0$ 的情况下相应于系统(3.10)的一般Riccati方程，并有

$$
\begin{aligned}
J_{2N_i}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{x}_0) = \sum_{k=i}^{N}\{|\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k)|^2 + \\
2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{D}_2(k)\boldsymbol{u}(k)\}
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

定义算子

$$
\left.\begin{aligned}
(\boldsymbol{G}_{N_i}\boldsymbol{w})(k) &= \boldsymbol{C}(k)\sum_{j=i}^{k-1}\boldsymbol{S}(k,j+1)\boldsymbol{B}_1(j)\boldsymbol{w}(j) + \boldsymbol{D}_1(k)\boldsymbol{w}(k) \\
(\boldsymbol{H}_{N_i}\boldsymbol{w})(k) &= \boldsymbol{C}(k)\sum_{j=i}^{k-1}\boldsymbol{S}(k,j+1)\boldsymbol{B}_2(j)\boldsymbol{w}(j) + \boldsymbol{D}_2(k)\boldsymbol{w}(k)
\end{aligned}\right\} \tag{3.18}
$$

$$
\hat{\boldsymbol{w}}_{N_i}(k) = \boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{R}_1(k)\boldsymbol{x}(k) \quad , \quad \hat{\boldsymbol{u}}_{N_i}(k) = -\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2(k)\boldsymbol{x}(k)
$$

并有

$J_{N_i}(0,\hat{w}_{N_i};x_0)=x_0^{\mathrm{T}}P_1(i)x_0 \quad , \quad J_{N_i}(\hat{u}_{N_i},0;x_0)=x_0^{\mathrm{T}}P_2(i)x_0$

引理 3.5 给出假设(H1)和(H2)。设存在惟一的非负定序列 $P_N(k)\in R^{n\times n}$ 满足 $T_1(k)>0$ 和 $[i,N]$ 上的 Riccati 方程(3.12)。那么下面给出 $J_{N_i}(u,w;x_p)$ 的最优反馈对 $(u_{N_i}(k),w_{N_i}(k))$。

定理 3.1 假设(H1)和(H2)成立,那么存在满足 $T_1(k)>0,k=i,\cdots,N$ 和 Riccati 方程(3.12)的非负定序列 $P_N(k)$。并且 $(u_{N_i}(k),w_{N_i}(k))$ 可以用反馈对 $(\bar{u}(k),\bar{w}(k))=(F_2(k)x(k),F_1(k)x(k))$ 表示出来。

证明:令 $S\in[S_0,N]$,根据引理 3.4 和引理 3.5,有

$$
\begin{aligned}
J_{N_i}(\bar{u},\bar{w};x_0)-x_0^{\mathrm{T}}P_N(s)x_0 &\leqslant \\
&J_{N_i}(0,\bar{w};x_0)=J_{1N_i}(\bar{w};x_0)\leqslant \\
&J_{N_i}(\bar{w};x_0)=x_0^{\mathrm{T}}P_1(s)x_0
\end{aligned}
$$

所以 $P_N(k)\leqslant P_1(k)$ 并且有

$$
\begin{aligned}
T_1(k)=\gamma^2 I-D_1^{\mathrm{T}}D_1(k)-B_1^{\mathrm{T}}(k)P_N(k+1)B_1(k)\geqslant \\
\gamma^2 I-D_1^{\mathrm{T}}D_1(k)-B_1^{\mathrm{T}}(k)P_1(k+1)B_1(k)>0
\end{aligned}
$$

因此可以定义 $P_N(k)$ 满足 $T_1(k)>0$ 和 Riccati 方程(3.12)。剩下的则从引理 3.7 得出。 证毕。

推论 3.1 假设 $C^{\mathrm{T}}(k)D_2(k)=0$ 和($H2$)成立。那么定理 3.1 的结论成立。

3.3.2 无限界问题

假设 A 是稳定的,并考虑如下定义的二次规划问题:

$$
\left.
\begin{aligned}
&x(k+1)=A(k)x(k)+B_1(k)w(k)+B_2(k)u(k)\\
&x(i)=x_0\\
&z(k)=C(k)x(k)+D_1(k)w(k)+D_2(k)u(k)
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.10}
$$

代价函数为

$$J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)=\sum_{k=i}^{\infty}\{|\boldsymbol{z}(k)|^2-\gamma^2|\boldsymbol{w}(k)|^2\}$$

并且
$$\boldsymbol{G}_{N_i}\in L(l^2(i,N;R^{m_1}),l^2(i,N;R^p))$$
$$\boldsymbol{H}_{N_i}\in L(l^2(i,N;R^{m_2}),l^2(i,N;R^p))$$
这里 $L(l^2(i,N;R^{m_1}),l^2(i,N;R^p))$ 表示 $l^2(i,N;R^{m_1})$ 到 $l^2(i,N,R^p)$ 的线性算子构成的集合。

下面假设 $\|\boldsymbol{G}_{N_i}\|<\gamma$ 并研究由此所得到的一些结论。由引理3.3可知，如果 $\|\boldsymbol{G}_{N_i}\|<\gamma$ 就有 $\boldsymbol{T}_1(k)>0$。首先给出 Riccati 方程(3.12)解的重要特性。令 SF 代表反馈控制器 $\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{f}(k,\boldsymbol{x}(k))$ 的集合。

引理3.6 假设存在 $[S_0,N]$ 上的序列 $\boldsymbol{P}_N(k)$ 满足 $\boldsymbol{T}_1(k)>0$ 和 Riccati 方程(3.12)。那么 $\boldsymbol{P}_N(k)\geqslant 0$ 并且对任意 $(\boldsymbol{u}(\cdot),\boldsymbol{w}(\cdot))\in l^2(S_0,N;R^{m_2})\times l^2(S_0,N;R^{m_1})$

$$J_{N_{s0}}(\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)\leqslant J_{N_{s0}}(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{w}};\boldsymbol{x}_0)\leqslant J_{N_{s0}}(\boldsymbol{u},\bar{\boldsymbol{w}};\boldsymbol{x}_0)$$

进一步有

$$\inf_{\boldsymbol{u}}\sup_{\boldsymbol{w}}J_{N_i}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)=\sup_{\boldsymbol{w}}\inf_{\boldsymbol{u}}J_{N_i}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)=$$
$$J_{N_i}(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{w}};\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N(i)\boldsymbol{x}_0$$

这里的下界和上界分别在 SF 和 $l^2(i,N;R^{m_1})$ 上取。在 $J_{N_i}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)$ 中二次项 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 中的算子为

$$-\boldsymbol{W}_{1N_i}=\boldsymbol{G}_{N_i}^*\boldsymbol{G}_{N_i}-\gamma^2\boldsymbol{I}\quad,\quad\boldsymbol{W}_{2N_i}=\boldsymbol{H}_{N_i}^*\boldsymbol{H}_{N_i}\geqslant 0$$

引理3.7 假设(H1)和(H2)成立，那么存在惟一的鞍点 $(\boldsymbol{u}_{N_i}(\cdot),\boldsymbol{w}_{N_i}(\cdot))\in l^2(i,N;R^{m_2})\times l^2(i,N;R^{m_1})$，即有

$$J_{N_i}(\boldsymbol{u}_{N_i},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)\leqslant J_{N_i}(\boldsymbol{u}_{N_i},\boldsymbol{w}_{N_i};\boldsymbol{x}_0)\leqslant J_{N_i}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_{N_i};\boldsymbol{x}_0),$$
$$\forall(u(\cdot),w(\cdot))\in l^2(i,N;R^{m_2})\times l^2(i,N;R^{m_1})$$

并且有

$$\min_{\boldsymbol{u}}\max_{\boldsymbol{w}}J_{N_i}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)=$$
$$\max_{\boldsymbol{w}}\min_{\boldsymbol{u}}J_{N_i}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)=J_{N_i}(\boldsymbol{u}_{N_i},\boldsymbol{w}_{N_i};\boldsymbol{x}_0)$$

进一步，对于式(3.14)((3.15))存在惟一的解 $\boldsymbol{P}_1(k)(\boldsymbol{P}_2(k))$ 和惟一最优控制 $\boldsymbol{w}_*(\boldsymbol{u}_*)$，相对于 $J_{N_i}(0,\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)(J_{N_i}(\boldsymbol{u},0,\boldsymbol{x}_0))$。与这个规划对应的 Riccati 方程为

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(k)+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}(k)-\\ \qquad\qquad \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}_2+\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{F}_2(k)+\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{R}_1(k)\\ (2)\ \boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(k)+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}(k)-\\ \qquad\qquad \boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{R}_2(k)+\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}_1+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{S})\boldsymbol{F}_1(k)\\ (3)\ \boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(k)+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}(k)-\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{F}_2(k)+\\ \qquad\qquad \boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{F}_1(k)-\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{F}_1(k)-\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_2(k)\end{array}\right\} \tag{3.19}$$

上式中的矩阵如式(3.13)中所定义。令$(\bar{\boldsymbol{u}}(k),\bar{\boldsymbol{w}}(k))$为反馈对，即$(\bar{\boldsymbol{u}}(k),\bar{\boldsymbol{w}}(k))=(\boldsymbol{F}_2(k)\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{F}_1(k)\boldsymbol{x}(k))$。

引理 3.8 设存在一非负定序列 $\boldsymbol{P}(k)$ 满足 $T_1(k)>0$ 和式(3.19)，并且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}_2$ 是稳定的。那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}_2$ 是稳定的，并且

$$J(\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)\leqslant J_{N_i}(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{w}};\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{x}_0\leqslant J(\boldsymbol{u},\bar{\boldsymbol{w}};\boldsymbol{x}_0),$$

$\forall(\boldsymbol{u}(\cdot),\boldsymbol{w}(\cdot))\in l^2(S_0,\infty;R^{m_2})\times l^2(S_0,\infty;R^{m_2})$，$\boldsymbol{w}_u(\cdot)=\boldsymbol{F}_1(\cdot)\boldsymbol{x}_{uw}\in l^2(S_0,\infty;R^{m_1})$，这里 $\boldsymbol{x}_{uw}(k)$ 是相对于$(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}),\bar{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{k}))$的响应。$\bar{\boldsymbol{w}}(k)$ 是 $J(\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)$ 的惟一极大元素。

证明：将式(3.19)中的(1)写成如下形式

$$\boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{C}_F^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_F(k)+\boldsymbol{A}_F^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}_F(k)+\boldsymbol{R}_{1F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{R}_{1F}(k)$$

这里 $\quad \boldsymbol{C}_F(k)=(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{F}(k),\boldsymbol{A}_F(k))=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}(k),$

$$\boldsymbol{R}_{1F}(k)=(\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_F)(k)$$

由于 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}_2$ 是稳定的，$(\boldsymbol{F}_1(k),(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}_2)(k))$ 是可检测的，那么由 Lyapunov 理论 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}_2$ 是稳定的。剩下的可由引理 3.5 得出。 证毕。

现在考虑 $l^2(i,\infty;R^{m_1})$ 上的算子 $\boldsymbol{G}_i$ 和 $l^2(i,\infty;R^{m_2})$ 上的算子 $\boldsymbol{H}_i$，

$$(G_i w)(k) = C(k)\sum_{j=i}^{k-1} S(k,j+1)B_1(j)w(j) + D_1(k)w(k)$$

$$(H_i u)(k) = C(k)\sum_{j=i}^{k-1} S(k,j+1)B_2(j)w(j) + D_2(k)u(k)$$

和

$$-W_1 = G_i^* G_i - \gamma^2 I \quad , \quad W_2 = H_i^* H_i$$

我们同样需要假设：

(H3)　$W_{2N} \geqslant dI$，W_{2N} 是对 W_2 的限制

(H4)　$\| G_i \| < \gamma$

利用引理 3.2 和引理 3.4 可得到如下结论。

引理 3.9　假设 $W_2 > d_2 I$ 对某些 $d_2 > 0$ 和(H4) 成立。那么下面结论是成立的。

(1) 对于 $J(u, w; x_0)$ 存在惟一的鞍点 $(u_*(\cdot), w_*(\cdot)) \in l^2(i, \infty; R^{m_2}) \times l^2(i, \infty; R^{m_1})$，即

$$J(u_*, w; x_0) \leqslant J(u_*, w_*; x_0) \leqslant J(u, w_*; x_0)$$

对任意

$$(u(\cdot), w(\cdot)) \in l^2(i, \infty; R^{m_2}) \times l^2(i, \infty; R^{m_1})$$

(2) 对于式 (3.20)(式 (3.21)) 存在惟一非负定序列 $P_1(k)(P_2(k))$ 满足 $A + B_1 T_1^{-1} R_1$ 是稳定的($A - B_1 T_2^{-1} R_1$ 是稳定的)，其中

$$P_1(k) = C^T C(k) + A^T(k) P_1(k+1) A(k) + R_1^T T_1^{-1} R_1(k) \tag{3.20}$$

$$P_2(k) = C^T C(k) + A^T(k) P_2(k+1) A(k) + R_2^T T_1^{-1} R_2(k) \tag{3.21}$$

(3) 对于 $J(0, w; x_0)(J(u, 0; x_0))$ 存在惟一的最优控制 $\hat{w}(\hat{u})$，$\hat{w}(k)$ 和 $\hat{u}(k)$ 可以表示为

$$\hat{w}(k) = T_1^{-1} R_1(k) x(k) \quad , \quad \hat{u}(k) = -T_2^{-1} R_2(k) x(k)$$

并且

$$J(0, \hat{w}; x_0) = x_0^T P_1(i) x_0 \quad , \quad J(\hat{u}, 0; x_0) = x_0^T P_2(i) x_0$$

引理 3.10 假设 $W_2 > d_2 I$ 对某些 $d_2 > 0$ 和(H3),(H4)成立。那么存在惟一的非负定序列 $P_N(k)$ 满足 $T_1(k) > 0$ 和 Riccati 方程(3.12)。对每一个 N, $P_N(k)$ 在 N 处是单调递增的。

证明:这个证明类似于引理 3.4 的证明(略)。

定理 3.2 假设 $W_2 > d_2 I$ 对某些 $d_2 > 0$ 和(H3),(H4)成立。那么在$[i,\infty)$上存在惟一的非负定序列 $P_N(k)$ 满足 $T_1(k) > 0$ 和 Riccati 方程(3.12),并且 $A + B_1F_1 + B_2F_2$ 是稳定的。进一步,$(u_*(k), w_*(k))$ 可以用反馈对$(\bar{u}(k), \bar{w}(k))$表示出来,并且有

$$\max_w \min_u J(u, w; x_0) = \min_u \max_w J(u, w; x_0) =$$
$$J(\bar{u}, \bar{w}; x_0) = x_0^{\mathrm{T}} P(i) x_0$$

证明:利用引理 3.9,存在式(3.20)和式(3.21)所定义的有界非负定的 $P_1(k)$ 和 $P_2(k)$。由(H3)可知,对于 $J_{N_i}(u, w; x_0)$ 存在惟一的鞍点$(u_N(\cdot), w_N(\cdot)) \in l^2(i,\infty; R^{m_2}) \times l^2(i,\infty; R^{m_1})$,

$$w_N(k) = (T_1 + S^{\mathrm{T}} T_2^{-1} S)^{-1} \cdot$$
$$(R_1 - S^{\mathrm{T}} T_2^{-1} R_2)(k) x(k) = F_{1N}(k) x(k)$$
$$u_N(k) = -(T_1 + S T_2^{-1} S)^{-1} \cdot$$
$$(R_2 + S T_1^{-1} R_1)(k) x(k) = F_{2N}(k) x(k)$$

并且有

$$J_{N_i}(u_N, 0; x_0) \leqslant J(u_*, w_*; x_0) \leqslant J(0, w_*; x_0) = x_0^{\mathrm{T}} P_1(i) x_0$$
$$0 \leqslant J_{N_i}(u_N, w_N; x_0) \leqslant J_{N_i}(0, w_N; x_0) \leqslant J(0, \tilde{w}_N; x_0)$$

这里的 $\tilde{w}_N$ 是将 w_N 扩展到$[i,\infty)$。这就意味着$\{(\tilde{u}_N, (\tilde{w}_N)\}$在 $l^2(i,\infty; R^{m_2}) \times l^2(i,\infty; R^{m_1})$ 上是有界的。因此可以抽取一个子序列用$\{(\tilde{u}_N, (\tilde{w}_N)\}$表示,并且在 $l^2(i,\infty; R^{m_2}) \times (l^2(i,\infty; R^{m_1})$ 上,当 $N \to \infty$ 时,$\tilde{u}_N \to u(\tilde{w}_N \to w)$。并且有

$$J_{N_i}(u_N, w_N; x_0) = x_0^{\mathrm{T}} P_N(i) x_0 \leqslant$$
$$J_{N_i}(0, w_N; x_0) \leqslant J(0, \hat{w}; x_0) = x_0^{\mathrm{T}} P_1(i) x_0$$

所以 $P_N(i) \leqslant P_1(i)$。因为 $P_N(i)$ 是 N 的单调递增函数,存在一界限 $P(i) \geqslant 0$ 满足 $T_1(i) > 0$ 和 Riccati 方程(3.19)。根据鞍点特

性,有

$$J_{N_i}(\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{w}_*;\boldsymbol{x}_0)\leqslant J_{N_i}(\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{w}_N;\boldsymbol{x}_0)\leqslant J_{N_i}(\boldsymbol{u}_*,\boldsymbol{w}_N;\boldsymbol{x}_0)\leqslant$$
$$J(\boldsymbol{u}_*,\tilde{\boldsymbol{w}}_N;\boldsymbol{x}_0)\leqslant J(\boldsymbol{u}_*,\boldsymbol{w}_*;\boldsymbol{x}_0) \tag{3.22}$$

式中的 $\boldsymbol{u}_*,\boldsymbol{w}_*$ 是将 $\boldsymbol{u}_*,\boldsymbol{w}_*$ 限制在$[i,N]$上。现在令 $N\to\infty$,式(3.22)变为

$$J(\tilde{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{w}_*;\boldsymbol{x}_0)\leqslant \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{x}_0\leqslant J(\boldsymbol{u}_*,\tilde{\boldsymbol{w}};\boldsymbol{x}_0)\leqslant$$
$$J(\boldsymbol{u}_*,\boldsymbol{w}_*;\boldsymbol{x}_0)\leqslant J(\tilde{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{w}_*;\boldsymbol{x}_0)$$

因此,所有的不等式变成等式,特别是 $\boldsymbol{u}_*(k)=\tilde{\boldsymbol{u}}(k),\boldsymbol{w}_*(k)=\tilde{\boldsymbol{w}}(k),J(\boldsymbol{u}_*,\boldsymbol{w}_*;\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{x}_0$。现在,我们将$(\boldsymbol{u}_*(k),\boldsymbol{w}_*(k))$表示为$(\bar{\boldsymbol{u}}(k),\bar{\boldsymbol{w}}(k))$,并证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}_2$ 是稳定的。令 $\boldsymbol{x}_N(k)$ 代表相对于$(\boldsymbol{u}_N(k),\boldsymbol{w}_N(k))$的响应,并考虑

$$\bar{\boldsymbol{x}}(k+1)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}_2)(k)\bar{\boldsymbol{x}}(k),\bar{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}_0$$
$$\tilde{\boldsymbol{x}}(k+1)=\boldsymbol{A}(k)\tilde{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{B}_1(k)\tilde{\boldsymbol{u}}(k)+\boldsymbol{B}_2(k)\tilde{\boldsymbol{w}}(k),\bar{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

因为 $\boldsymbol{F}_{iN}(k)\to\boldsymbol{F}_i(k),i=1,2,\boldsymbol{x}_N(k)\to\bar{\boldsymbol{x}}(k)$ 对于任意 k。$(\tilde{\boldsymbol{u}}_N(\cdot),\tilde{\boldsymbol{w}}_N(\cdot))$ 在 $l^2(i,\infty;R^{m_2})\times l^2(i,\infty;R^{m_1})$ 的子序列中弱收敛到$(\tilde{\boldsymbol{u}}(\cdot),\tilde{\boldsymbol{w}}(\cdot))$,我们有 $\boldsymbol{x}_N(k)\to\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$ 对于任意 k。因此 $\bar{\boldsymbol{x}}(k)=\tilde{\boldsymbol{x}}(k)$。但是$(\tilde{\boldsymbol{u}}(\cdot),\tilde{\boldsymbol{w}}(\cdot))\in l^2(i,\infty;R^{m_2})\times l^2(i,\infty;R^{m_1}),\tilde{\boldsymbol{x}}(\cdot)\in l^2(i,\infty;R^n)$。所以 $\bar{\boldsymbol{x}}(\cdot)\in l^2(i,\infty;R^n)$ 意味着 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}_2$ 是稳定的。我们还可以得到

$$\lim_{N\to\infty}J_{N_i}(\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{w}_N;\boldsymbol{x}_0)=J(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{w}};\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{x}_0$$

证毕。

推论 3.2 假设 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{D}_2(k)=0$ 对于任意 k 和($H4$)是成立的。那么定理 3.2 的结论成立。

下面我们去掉假设(H3)并考虑

$$J_a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)=\sum_{k=i}^{\infty}\{|\boldsymbol{z}(k)|^2+a|\boldsymbol{u}(k)|^2-\gamma^2|\boldsymbol{w}(k)|^2\}$$

引理 3.11 设(H4)成立。那么下列结论成立。

(1) 对于 $J_a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)$ 存在惟一的鞍点$(\boldsymbol{u}_a,\boldsymbol{w}_a)$。

(2) 在$[i,N]$上存在惟一的非负定有界序列 $\boldsymbol{P}_a(k)$ 满足

$$T_{1a}(k) > 0$$

$$\boldsymbol{P}_a(k) = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(k) + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}_a(k+1)\boldsymbol{A}(k) - \boldsymbol{F}_{2a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{2a}\boldsymbol{F}_{2a}(k) + \boldsymbol{F}_{1a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{1a}\boldsymbol{F}_{1a}(k) - \boldsymbol{F}_{2a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_a\boldsymbol{F}_{1a}(k) - \boldsymbol{F}_{1a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_a\boldsymbol{F}_{2a}(k)$$

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}_{1a} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}_{2a}$ 是稳定的。

这里的矩阵如(3.13)式定义。鞍点$(\boldsymbol{u}_a, \boldsymbol{w}_a)$可以用反馈对$(\bar{\boldsymbol{u}}_a(k), \bar{\boldsymbol{w}}_a(k)) = (\boldsymbol{F}_{2a}(k)\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{F}_{1a}(k)\boldsymbol{x}(k))$表示出来。

(3) $(\boldsymbol{C}(\cdot)\boldsymbol{x}_a(\cdot) + \boldsymbol{D}_2(\cdot)\boldsymbol{u}_a(\cdot), \boldsymbol{w}_a(\cdot)) \in l^2(i,\infty;R^{m_2}) \times l^2(i,\infty;R^{m_1})$在 0 处是一致有界的，这里的$\boldsymbol{x}_a(k)$是相对于$(\bar{\boldsymbol{u}}_a(k), \bar{\boldsymbol{w}}_a(k))$的响应。

令 $SF(\boldsymbol{A})$ 代表反馈控制 $\boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{x}(k)$ 的集合并且 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}$ 是稳定的。

定理 3.3 假设(H4)成立，那么存在惟一的非负定有界序列$\boldsymbol{P}(k)$满足$\boldsymbol{T}_1(k) > 0$和Riccati方程(3.19)。如果$\boldsymbol{u}_a(k)$是一致有界的，那么$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}_2$是稳定的，并且有

$$\inf_{\boldsymbol{u}}\sup_{\boldsymbol{w}} J(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}; \boldsymbol{x}_0) = \sup_{\boldsymbol{w}}\inf_{\boldsymbol{u}} J(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}; \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{x}_0$$

其中下确界和上确界分别取于 $SF(\boldsymbol{A})$ 和 $l^2(i,\infty;R^{m_1})$。

证明：引理3.11中的$\boldsymbol{P}_a(k)$是非负定的并且关于a是单调递增的。因此当$a \to 0$时，$\boldsymbol{P}(k)$存在界并且$\boldsymbol{P}(k)$满足$\boldsymbol{T}_1(k) > 0$和Riccati方程(3.19)。由假设可知，$\boldsymbol{u}_a(k)$是一致有界的。由引理3.11可知，$\boldsymbol{w}_a(k)$也是一致有界的。利用$\boldsymbol{u}_a$和$\boldsymbol{w}_a$的弱界，我们可以得到$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}_2$是稳定的。为给出最后一个等式，我们应注意到

$$\inf_{\boldsymbol{u}}\sup_{\boldsymbol{w}} J(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}; \boldsymbol{x}_0) = \sup_{\boldsymbol{w}} J(\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w}; \boldsymbol{x}_0) \leqslant J(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{w}}; \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{x}_0 \tag{3.23}$$

在式 $\quad \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{x}_0 = J_a(\boldsymbol{u}_a, \boldsymbol{w}_a; \boldsymbol{x}_0) \leqslant J_a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_a; \boldsymbol{x}_0)$

中令 $a \downarrow 0$，有

$$J(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{w}}; \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(i)\boldsymbol{x}_0 \leqslant J(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{w}}; \boldsymbol{x}_0)$$

和

$$x_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(i)x_0 = J(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{w}};x_0) \leqslant \inf_{u} J(\boldsymbol{u},\bar{\boldsymbol{w}};x_0) \leqslant \mathop{\mathrm{sub}}_{w}\inf_{u} J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w};x_0) \tag{3.24}$$

将式(3.23)和式(3.24)合并,就可得到所希望的结果。

3.4 H_∞ 控制问题

考虑线性时变系统

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_1(k)\boldsymbol{w}(k) + \boldsymbol{B}_2(k)\boldsymbol{u}(k), \\ \boldsymbol{x}(0) &= \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{z}(k) &= \boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}_1(k)\boldsymbol{w}(k) + \boldsymbol{D}_2(k)\boldsymbol{u}(k) \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

这里 $\boldsymbol{x} \in R^n, \boldsymbol{w} \in R^{m_1}, \boldsymbol{u} \in R^{m_2}, \boldsymbol{z} \in R^p$,所有矩阵见3.3节定义。令 $\boldsymbol{K}(k) \in R^{m_2 \times n}, k = 0,1,\cdots$ 是一致有界的,并且定义

$$(\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{w})(k) = (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{K})(k)\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{S}_k(k,j+1)\cdot \boldsymbol{B}_1(j)\boldsymbol{w}(j) + \boldsymbol{D}_1(k)\boldsymbol{w}(k)$$

这里 $\boldsymbol{S}_K(k,j)$ 是$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K})(k)$ 的基本解,定义为

$$\boldsymbol{S}_k(k,j) = \begin{cases} (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K})(k-1)\cdots(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K})(j) & ,k > j \\ I & ,k = j \end{cases}$$

如果 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}$ 是稳定的,那么 $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{K}}(k) \in L(l^2(i,\infty;R^{m_1}),l^2(i,\infty;R^p))$。对于一给定 $\gamma > 0$,我们希望找到 $\boldsymbol{K}(k)$ 存在的条件,并满足 $\|\boldsymbol{G}_k\| < \gamma$。这个问题是与二次规划相关的,即

$$J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0) = \sum_{k=0}^{\infty}\{|\boldsymbol{z}(k)|^2 - \gamma^2|\boldsymbol{w}(k)|^2\} \quad , \quad \gamma > 0$$

与此式相对应的 Riccati 方程是式(3.19)。

引理 3.12 假设存在一非负定序列 $\boldsymbol{P}(k)$,满足 $\boldsymbol{T}_1(k) > 0$,并且满足式(3.19),$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}_1$ 是稳定的,那么 $\boldsymbol{K}(k) = \boldsymbol{F}_2(k)$ 是稳定的,且有 $\|\boldsymbol{G}_K\| < \gamma$。

证明:类似于引理3.8,我们可以应用李亚普诺夫理论来证明 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}_2$ 的稳定性。$\|\boldsymbol{G}_K\| < \gamma$ 可由引理3.4得出。

引理 3.13 令$(\boldsymbol{C}(k),\boldsymbol{A}(k))$是可检测的并且$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{D}_2(k)=0$。假设存在一稳定反馈$\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{x}(k)$满足$\|\boldsymbol{G}_k\|<\gamma$。那么存在一有界非负定序列$\boldsymbol{P}(k)$满足$\boldsymbol{T}_1(k)>0$和式(3.19),并且$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}_2$是稳定的。

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1)&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K})(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}_1(k)\boldsymbol{w}(k)+\boldsymbol{B}_2(k)\boldsymbol{v}(k),\\ \boldsymbol{x}(0)&=\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{z}(k)&=(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{K})(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}_1(k)\boldsymbol{w}(k)+\boldsymbol{D}_2(k)\boldsymbol{v}(k)\end{aligned}\right\}$$

并且有

$$J(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\{|\boldsymbol{z}(k)|^2-\gamma^2|\boldsymbol{w}(k)|^2\}$$

$$J_a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\{|\boldsymbol{z}(k)|^2+a|\boldsymbol{v}(k)|^2-\gamma^2|\boldsymbol{w}(k)|^2\}$$

根据引理 3.11,存在惟一非负定序列$\boldsymbol{P}_a(k)$满足:

(1) $\boldsymbol{T}_{1a}(k)>0$;

(2) $\boldsymbol{P}_a(k)=\boldsymbol{C}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_K(k)+\boldsymbol{A}_K^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}_a(k+1)\boldsymbol{A}_K(k)-\boldsymbol{F}_{2Ka}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{2a}\boldsymbol{F}_{2Ka}(k)+\boldsymbol{F}_{1Ka}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{1a}\boldsymbol{F}_{1Ka}(k)-\boldsymbol{F}_{2Ka}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_a\boldsymbol{F}_{1Ka}(k)-\boldsymbol{F}_{1Ka}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_a\boldsymbol{F}_{2Ka}(k)$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}_{1Ka}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{F}_{2Ka}$是稳定的。

这里$\boldsymbol{A}_K(k)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K})(k)$,$\boldsymbol{C}_K(k)=(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{K})(k)$。对于$\boldsymbol{J}_a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w};\boldsymbol{x}_0)$存在惟一的鞍点$(\boldsymbol{v}_a(k),\boldsymbol{w}_a(k))$,并且可以用反馈对$(\boldsymbol{F}_{2Ka}(k)\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{F}_{1Ka}(k)\boldsymbol{x}(k))$表达出来。进一步,$(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{K})(k)\boldsymbol{x}_a(k)+\boldsymbol{D}_2(k)\boldsymbol{v}_a(k)$和$\boldsymbol{W}_a$是一致有界的,这里$\boldsymbol{x}_a(k)$是相对于$(\boldsymbol{v}_a(k),\boldsymbol{w}_a(k))$的响应。因为$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2(k)=0$,$\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}_a(k)$和$\boldsymbol{D}_2(k)\{\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{x}_a(k)+\boldsymbol{v}_a(k)\}$在$l^2(i,\infty;R^p)$上是一致有界的。但是$\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2(k)>d\boldsymbol{I}$意味着$\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{x}_a(k)+\boldsymbol{v}_a(k)$是一致有界的。当$a\to 0$,$\boldsymbol{P}_a(k)$收敛到$\boldsymbol{P}(k)\geqslant 0$,并且满足:

$$\left.\begin{aligned}&①\boldsymbol{T}_1(k)>0\\ &②\boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{C}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_K(k)+\boldsymbol{A}_K^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}_a(k+1)\boldsymbol{A}_K(k)-\\ &\qquad\boldsymbol{F}_{2K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{F}_{2K}(k)+\boldsymbol{F}_{1K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{F}_{1K}(k)-\\ &\qquad\boldsymbol{F}_{2K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_a\boldsymbol{F}_{1K}(k)-\boldsymbol{F}_{1K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_a\boldsymbol{F}_{2K}(k)\end{aligned}\right\}\quad(3.26)$$

式中 $F_{1K}(k)=F_1(k)$, $F_{2K}(k)=-K(k)+F_2(k)$

为了证明 $A+B_1F_{1K}+B_2F_{2K}$ 是稳定的,考虑

$$
\begin{aligned}
x_a(k+1)=(A+B_2K)(k)x_a(k)+&\\
&B_1(k)F_{1Ka}(k)x_a(k)+B_2(k)F_{2Ka}(k)x_a(k)=\\
&(A-HC)(k)x_a(k)+H(k)C(k)x_a(k)+\\
&B_1(k)w_a(k)+B_2(k)\,(K_a+v_a)(k)
\end{aligned}
$$

$$x_a(0)=x_0$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}(k+1)=(A-HC)(k)\tilde{x}(k)+H(k)\tilde{z}(k)+&\\
&B_1(k)\tilde{w}(k)+B_2(k)\tilde{u}(k)
\end{aligned}
$$

$$\tilde{x}(0)=x_0$$

$$x(k+1)=(A_K+B_1F_{1K}+B_2F_{2K})(k)x_a(k)$$

$$x(0)=x_0$$

这里 $H(k)$ 满足 $A-HC$ 是稳定的,$(\tilde{z},\tilde{u},\tilde{w})$ 是子序列 $(C(k)x_a(k),K(k)x_a(k)+v_a(k),w_a(k))$ 的弱界。如定理 3.3 的证明,$\tilde{x}(k)=x(k)$ 并且 $A_K+B_1F_{1K}+B_2F_{2K}$ 是稳定的。为了证明的完整性,我们只需指出式(3.26) 与式(3.19) 相似,并且 $(A_K+B_1F_{1K}+B_2F_{2K})(k)=(A+B_1F_1+B_2F_2)(k)$。

证毕。

定理 3.4 令$(C(k),A(k))$是可检测的,并且 $D_2^{\mathrm{T}}(k)C(k)=0$,那么存在稳定反馈控制 $u(k)=K(k)x(k)$ 满足 $\|G_k\|<\gamma$ 当且仅当存在一有界非负定矩阵序列$P(k)$,满足 $T_1(k)>0$ 和式(3.19),并且 $A+B_1F_1+B_2F_2$ 是稳定的。如果上述条件成立,则

$$\inf_u\sup_w J(u,w;x_0)=\sup_w\inf_u J_{N_i}(\bar{u},\bar{w};x_0)=x^{\mathrm{T}}P_N(i)x_0$$

这里$(\bar{u}(\cdot),\bar{w}(\cdot))=(F_2(\cdot)x(\cdot),F_1(\cdot)x(\cdot))$,下确界和上确界分别取值于 $SF(A)$ 和 $l^2(i,\infty;R^{m_1})$。为了更好地说明此定理,考虑下面一个简单的例子。

例:考虑下面的系统

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&0&0\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}w(k)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$z(k)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}w(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(k)$$

这里

$$a=\begin{cases}1 & , \quad k=2m+1\\0 & , \quad k=2m, m=0,1,2\cdots\end{cases}$$

通过求解式(3.19)的 Riccati 方程,并令 $\gamma=10$,我们有

$$P(k)=\begin{bmatrix}1.5153&0.0104&0.0054\\0.0104&1.0207&0.0157\\0.0054&0.0105&1.5387\end{bmatrix}, \quad k=2m+1$$

$$P(k)=\begin{bmatrix}1.0103&0.0155&0.0001\\0.0155&1.5388&0.0105\\0.0001&0.0105&1.0206\end{bmatrix}, \quad k=2m$$

反馈对$(F_1(k),F_2(k))$见下式:

$$F_1(k)=[0.0102 \quad 0.0103 \quad 0.0002],$$

$$F_2(k)=[-0.5051 \quad -0.0001 \quad -0.0052]$$

$$k=2m+1$$

$$F_1(k)=[0.0103 \quad 0.0155 \quad 0.0001],$$

$$F_2(k)=[0 \quad -0.0021 \quad -0.0062]$$

$$k=2m$$

第 4 章　递阶/分散 H_∞ 优化方法

4.1　动态线性系统的递阶控制算法

在一般的连续和离散的线性二次型系统中，求最优控制规律就要解适当形式的 Riccati 方程。对 n 阶系统，Riccati 方程是具有 $n(n+1)/2$ 个元素的非线性矩阵微分或差分方程。随着阶次的增加，它要求的存储器容量和计算时间将急剧增加。而且在计算机中，高次方程的积分会造成计算误差而使数值计算不稳定。这就是所谓大系统中"维数的灾难"。为了解决这个困难，我们就用递阶控制的方法来处理这种问题。

设有互相连接的 N 个子系统，对于子系统 i，$\boldsymbol{x}_i$ 为 n_i 维状态向量，$\boldsymbol{u}_i$ 为 m_i 维控制向量，z_i 为其它子系统的状态产生的 r_i 维输入向量。各子系统本身可以由线性微分方程来描述，即

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t) = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i(t) + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{u}_i(t) + \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{z}_i(t) \tag{4.1}$$

再假定输入量 $\boldsymbol{z}_i$ 为 N 个子系统状态的线性组合，即

$$z_i = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{L}_{ij}\boldsymbol{x}_j \tag{4.2}$$

优化问题就是选择控制 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_N$ 使下述形式的二次型性能指标函数为最小：

$$J = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_i(T)\|_{\boldsymbol{P}_i}^2 + \int_0^T \frac{1}{2}\left[\|\boldsymbol{x}_i(t)\|_{\boldsymbol{Q}_i}^2 + \|\boldsymbol{u}_i\|_{\boldsymbol{R}_i}^2 + \|z_i\|_{\boldsymbol{S}_i}^2\right]\mathrm{d}t\right) \tag{4.3}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_i, \boldsymbol{P}_i$ 为半正定矩阵，$\boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{S}_i$ 为正定矩阵。

4.1.1 目标协调法

该方法的基础是将原始的最小化问题转化成较简单的最大化问题,然后用二级迭代计算结构来求解。

定义 4.1 对偶函数

$$\Phi(\lambda) = \min\{L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})\}$$

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{N}\{\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_i(T)\|_{\boldsymbol{P}_i}^2 + \int_0^T[\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_i\|_{\boldsymbol{Q}_i}^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_i\|_{\boldsymbol{R}_i}^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{z}_i\|_{\boldsymbol{S}_i}^2 + \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{z}_i - \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{L}_{ij}\boldsymbol{x}_j(t)]\mathrm{d}t\} \tag{4.4}$$

$$r = \sum_{i=1}^{N} r_i$$

根据拉格朗日对偶定理

$$\max_{\lambda}\Phi(\lambda) = \min_{u} J$$

当给定 $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*$

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z},\lambda^*) = \sum_{i=1}^{N}\{\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_i(T)\|_{\boldsymbol{P}_i}^2 + \int_0^T(\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_i\|_{\boldsymbol{Q}_i}^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_i\|_{\boldsymbol{R}_i}^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{z}_i\|_{\boldsymbol{S}_i}^2 + \boldsymbol{\lambda}_i^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_i - \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\lambda}_j^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_{ji}\boldsymbol{x}_i)\mathrm{d}t\} = \sum_{i=1}^{N} L_i \tag{4.5}$$

拉格朗日算式可以分解成 N 个独立的子拉格朗日算式,对每一个子系统拉格朗日乘子是已知的,$\boldsymbol{\lambda}_i^*$ 可以作为已知函数,由递阶结构的第一级给定,每个子系统的最小化结果可决定对偶函数 $\Phi(\boldsymbol{\lambda}^*)$。在第二级中所有子系统的解为已知,$\Phi(\boldsymbol{\lambda}^*)$ 可以用典型的无约束的优化方法,譬如牛顿法、梯度法或共轭梯度法来改善。

$$\nabla_{\lambda_i}\Phi(\boldsymbol{\lambda})\mid_{\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*} = \boldsymbol{z}_i - \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{L}_{ij}\boldsymbol{x}_j = e_i, \quad i = 1,2,\cdots,N \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{k+1}(t) = \boldsymbol{\lambda}^k(t) + \alpha^k \mathrm{d}^k(t) \tag{4.7}$$

α^k 为步长，d^k 为搜索方向。

$$\mathrm{d}^{k+1}(t) = \mathrm{e}^{k+1}(t) + \beta^{k+1}\mathrm{d}^k(t)$$

$$\beta^{(k+1)} = \frac{\int_0^T (\mathrm{e}^{k+1}(t))^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{k+1}(t)\mathrm{d}t}{\int_0^T (\mathrm{e}^k(t))^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^k(t)\mathrm{d}t} \tag{4.8}$$

$$\mathrm{d}^0 = \mathrm{e}^0$$

一旦 $\boldsymbol{e}^k(t)(0 \leqslant t \leqslant T)$ 足够接近于零，就达到全局最优。

目标协调算法：

步骤 1：利用已知的拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*$，在第一级子系统中将 $\boldsymbol{L}_i$ 最小化，因为子系统是线性的，可以得到一个 Riccati 方程，将解答存储起来。

步骤 2：在第二级用共轭梯度法更新 $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$ 轨迹，当以规格化形式记述的系统关联误差：

$$\mathrm{e}^k = \left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^t \{\boldsymbol{z}_i - \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{L}_{ij}\boldsymbol{x}_j\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{z}_i - \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{L}_{ij}\boldsymbol{x}_j\}\mathrm{d}t\right)/\Delta t$$

足够小时，就获得系统的最优解。二级目标协调结构如图 4.1 所示。

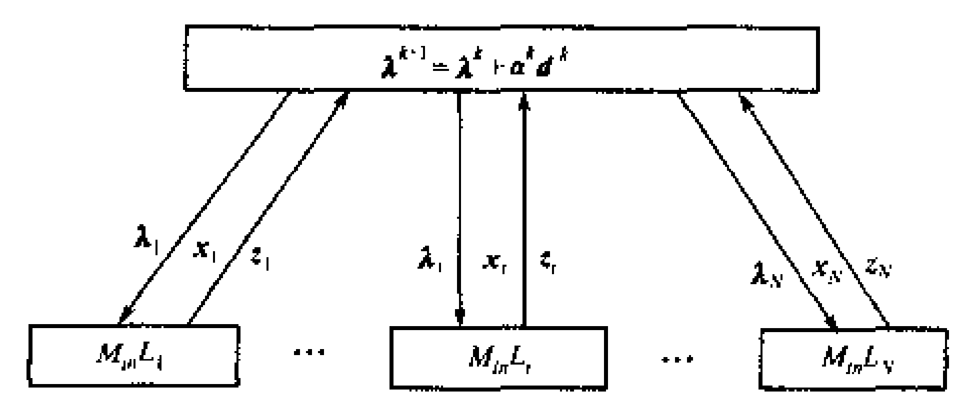


图 4.1　二级目标协调结构

4.1.2 关联预测法

如通常一样,整个系统由 N 个互相连接的线性子系统组成

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + C_i z_i, \qquad i = 1,2,\cdots,N \tag{4.9}$$

式中
$$z_i = \sum_{j=1}^{N} L_{ij} x_j$$

其目标是要使以下的性能指标最小:

$$J = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2} \| x_i(T) \|_{P_i}^2 + \frac{1}{2} \int_0^T (\| x_i(t) \|_{Q_i}^2 + \| u_i(t) \|_{R_i}^2) \mathrm{d}t \right\} \tag{4.10}$$

$$L = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2} \| x_i(T) \|_{P_i}^2 + \int_0^T \left[\frac{1}{2} \| x_i(t) \|_{Q_i}^2 + \frac{1}{2} \| u_i(t) \|_{R_i}^2 + \lambda_i^{\mathrm{T}} (z_i - \sum_{j=1}^{N} L_{ij} x_j) + p_i^{\mathrm{T}} (-\dot{x}_i + A_i x_i + B_i u_i + C_i z_i) \right] \mathrm{d}t \right\} \tag{4.11}$$

p_i 为 n_i 维伴随向量,λ_i 为 r_i 维拉格朗日乘子向量。给定 $\lambda_i = \lambda_i^*$, $z_i = z_i^*$

$$L = \sum_{i=1}^{N} L_i = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2} \| x_i(T) \|_{P_i}^2 + \int_0^T \frac{1}{2} \| x_i(t) \|_{Q_i}^2 + \frac{1}{2} \| u_i(t) \|_{R_i}^2 + \lambda_i^{*\mathrm{T}} z_i^* - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{*\mathrm{T}} L_{ji} x_i + P_i^{\mathrm{T}} (-\dot{x}_i + A_i x_i + B_i u_i + C_i z_i^*)] \mathrm{d}t \right\} \tag{4.12}$$

式中
$$L_i = \frac{1}{2} \| x_i(T) \|_{P_i}^2 + \int_0^T \left[\frac{1}{2} \| x_i(t) \|_{Q_i}^2 + \frac{1}{2} \| u_i \|_{R_i}^2 + \lambda_i^{*\mathrm{T}} z_i^* - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{*\mathrm{T}} L_{ji} x_i + p_i^{\mathrm{T}} (A_i x_i + B_i u_i + C_i z_i^* - \dot{x}_i) \right] \mathrm{d}t \} \tag{4.13}$$

协调向量为$\begin{bmatrix} \lambda \\ z \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \lambda^{*k+1} \\ z^{*k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{*}(x^k, u^k, P^k) \\ z^{*}(x^k, u^k, P^k) \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

$$\lambda_i^* = -C_i^{\mathrm{T}} p_i \qquad z_i^* = \sum_{j=1}^{N} L_{ij} x_j \tag{4.15}$$

令 $p_i(t) = K_i(t) x_i(t) + g_i(t), S_i \triangleq B_i R_i B_i^{\mathrm{T}}$

所以在第 $k+1$ 次迭代中,第二级产生向量

$$\begin{bmatrix} \lambda_i^{*k+1} \\ z_i^{*k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_i^{\mathrm{T}} P_i \\ \sum_{j=1}^{N} L_{ij} x_j \end{bmatrix}^k \tag{4.16}$$

求解以下矩阵和向量微分方程:

$$\dot{K}_i(t) = -K_i(t) A_i - A_i^{\mathrm{T}} K_i(t) + K_i(t) S_i K_i(t) - Q_i, \quad K_i(T) = P_i \tag{4.17}$$

$$\dot{g}_i(t) = -(A_i - S_i K_i(t))^{\mathrm{T}} g_i(t) - K_i(t) C_i z_i(t) + \sum_{j=1}^{N} L_{ji}^{\mathrm{T}} \lambda_j(t), \quad g_i(T) = 0 \tag{4.18}$$

第一级控制规律为

$$u_i(t) = -R_i^{-1} B_i^{\mathrm{T}} K_i(t) x_i(t) - R_i^{-1} B_i^{\mathrm{T}} g_i(t) \tag{4.19}$$

关联预测算法:

步骤1:解 N 个独立的微分矩阵Riccati方程,并将 $K_i(t), i = 1,2,\cdots,N$ 保存起来。

步骤2:按初始给定的 $\lambda_i^k(t)$ 和 $z_i^k(t)$ 解伴随方程计算并存储 $g_i(t), i = 1,2,\cdots,N$。

步骤 3: 解状态方程: $\dot{x}_i(t) = (A_i - S_i K_i(t)) x_i(t) - S_i g_i(t) + C_i z_i(t), x_i(0) = x_{i0}$,并存储 $x_i(t), i = 1,2,\cdots,N$。

步骤4:在第二级,利用步骤2和步骤3的结果更新协调向量。

步骤5:按整个关联误差

$$e_{\lambda i}(t) = \left(\sum_{i=1}^{N} \int_0^t \{ z_i(t) - \sum_{j=1}^{N} L_{ij} x_j(t) \}^{\mathrm{T}} (z_i(t) - \sum_{j=1}^{N} L_{ij} x_j \} \mathrm{d}t \right) / \Delta t$$

和 $e_{\lambda_2}(t)=\left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\{\boldsymbol{\lambda}_i(t)+\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_i(t)\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\lambda}_i(t)+\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_i(t)\}\mathrm{d}t\right)/\Delta t$

的比较制定是否达到最优。

目标协调法是基于关联平衡原理的。它将大系统的递阶控制缩减成一组较低阶子系统和一个协调方程,这个方法的计算量要求要比原来的大系统少得多,存储量也不会变得不可接受。但整个计算很大程度上决定于第二级线性搜索迭代的收敛性。在第二级相继两次的迭代中,我们必须解第一级中 N 个子问题。第二级收敛越慢,N 个去耦的独立子问题计算等待时间也越长。只有当第一级问题小而又简单时,计算时间才能有较大改善。目标协调法的一个缺点是在第二级中数值计算收敛慢,它反过来又影响到第一级的计算;另一缺点是不能用较少的迭代次数来获得次最优解。而关联预测法在第二级的计算要比目标协调法简单得多,而且不存在奇异问题。计算表明,关联预测法在第二级收敛是相当快的。从存储的观点来看,这两个方法的要求大体相当,都可用公共块节省存储量。计算表明,关联预测法只需目标协调法四分之一的时间。关于子系统之间的信息结构,不论目标协调法还是关联预测法,在构成反馈时都需要子系统的全部状态信息。另外这两个递阶控制方法对模型的误差和元件的失误都十分敏感。但对后一种困难可用结构摄动法加以克服。

在一般情况下,虽然我们能测量初始状态 $\boldsymbol{x}_0$,但在计算机控制时,初始条件会随时间而变化,这时就考虑到用闭环控制方法。大系统闭环递阶控制方法与开环递阶控制方法相似,只是控制与系统的初始条件无关,因此不做详细介绍。但是特别应该注意的是,前面我们提到过,如果存在模型误差或控制参数不确定的情况下,无论是目标协调法还是关联预测法都不能很好地利用,也就是在大系统鲁棒设计问题上,不能直接使用以上两种方法,而最好采用结构摄动法。同时,为了使大系统具有好的鲁棒性能,最好能采用 H_∞ 算法,为此,我们根据大系统处理方法的思想,给出了下述的 H_∞ 递阶优化算法。

4.2 动态线性系统的 H_∞ 递阶优化算法

H_∞ 递阶优化算法大体可以概括为:将控制系统分为若干个子系统。对于每一个子系统,在有干扰存在的情况下,用 H_∞ 算法来设计最优反馈矩阵,使每一个子系统具有鲁棒性;而将系统分解时的关联误差作为一种摄动,用大系统结构摄动方法来设计补偿反馈矩阵;最后将每个子系统单独设计出来的反馈矩阵与补偿反馈矩阵结合起来,就构成大系统的最优反馈矩阵。

现考虑线性时不变大系统,这个大系统可用 N 个子系统来描述:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t) = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i(t) + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{u}_i(t) + \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{L}_{ij}\boldsymbol{x}_j(t),\ i = 1,2,\cdots,N \tag{4.20}$$

每一子系统有它自己的特性指标函数

$$J_i = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}_i(t) + \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{u}_i(t))\mathrm{d}t \tag{4.21}$$

虽然各个系统的目标是相互独立的,但它们在使整个系统特性指标函数 $J = \sum_{i=1}^{N} J_i$ 最小化中有“目标协调”。现在假定系统具有完全分散的信息结构,每一个子系统($\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{B}_i$)是完全可控的。

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{z}_i(t) &= \boldsymbol{D}_i\boldsymbol{x}_i(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_i(t) &= \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i(t) + \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{u}_i(t) + \boldsymbol{E}_i\boldsymbol{w}_i(t), \qquad i = 1,2,\cdots,N\end{aligned}\right\}$$

其中 $\boldsymbol{E}_i$ 为干扰矩阵。在考虑存在干扰的情况下,用 H_∞ 算法求解最优反馈 $\boldsymbol{K}_i$ 矩阵,$\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i$。$\boldsymbol{P}_i$ 为如下的代数 Riccati 方程的对称非负定的解

$$\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_i - \boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\lambda_i^2}\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}_i = 0 \tag{4.22}$$

并且保证矩阵 $\boldsymbol{A}_i - (\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}} - (1/\lambda_i^2)\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}_i$ 的所有奇异值都位于左半开平面。

其相应的最优特性指标为 $J_i^* = \frac{1}{2}x_i^{\mathrm{T}}(t_0)P_ix_i(t_0)$, $i = 1,2,\cdots,N$

去耦后的系统的最优特性指标为 $J^*(\cdot) = \sum_{i=1}^{N} J_i^*(\cdot)$。

令集中控制系统的最优特性指标为 J^0,那么在一般情况下,根据子系统之间的互相连接,J^* 可能大于或小于 J^0。可以证明,当且仅当关联矩阵 $\boldsymbol{L} = \{\boldsymbol{L}_{ij}\}, i = 1,2,\cdots,N$ 可以表达为 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{SK}$ 时,$J^*(\cdot) = J^0(\cdot)$,$\boldsymbol{S}$ 为一斜对称矩阵,即 $\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$。这就是说,如果系统的关联矩阵满足上述条件,那么整个系统的最优控制可以用分散的控制 $\boldsymbol{u}_i^*(t)$ 来达到,即

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t) = (\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i)\boldsymbol{x}_i(t) + \boldsymbol{E}_i\boldsymbol{w}_i + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{L}_{ij}\boldsymbol{x}_j(t)$$
$$(i = 1,2,\cdots,N)$$

这时局部控制器不仅使整个系统优化,而且也使整个系统稳定。子系统之间的关联可以省略,整个系统只要解 N 个独立的子问题。但是一般情况下,$\boldsymbol{L}$ 不满足上述要求,因此 $J^*(\cdot)$ 可能大于或小于 $J^0(\cdot)$。这时我们在局部控制中加入所谓的"校正"$\boldsymbol{u}_i^c(t)$,使

$$\boldsymbol{u}_i(t) = \boldsymbol{u}_i^*(t) + \boldsymbol{u}_i^c(t), \boldsymbol{u}_i^c(t) = -\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{H}_{ij}\boldsymbol{x}_j(t) \quad (4.23)$$

式中 $\boldsymbol{H}_{ij}$ 是 $m_i \times n_j$ 维从第 j 子系统到第 i 子系统的反馈增益矩阵,这样就可以实现我们所需要的闭环控制:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t) = (\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}_i(t) + \boldsymbol{E}_i\boldsymbol{w}_i(t) + \sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{L}_{ij} - \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{H}_{ij})\boldsymbol{x}_j(t), i = 1,2,\cdots,N \quad (4.24)$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{BH} &= \boldsymbol{B}^P \cdot \boldsymbol{K}, \quad \boldsymbol{K} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2, \cdots, \boldsymbol{K}_N\} \\ \boldsymbol{H} &= \{\boldsymbol{H}_{ij}\}, \quad i = 1,2,\cdots,N \\ \boldsymbol{B} &= \mathrm{diag}\{\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \cdots, \boldsymbol{B}_N\} \end{aligned}\right\} \quad (4.25)$$

$\boldsymbol{B}^P$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的摄动矩阵,它不是对角阵。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{L})\boldsymbol{x}(t) - (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^P)\boldsymbol{Kx}(t) \quad (4.26)$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵，$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_N)$。因此闭环系统受两个分量影响，即“局部”的 $\boldsymbol{BKx}(t)$ 和“全局”的 $\boldsymbol{B}^P\boldsymbol{Kx}(t)$。$H_\infty$ 递阶优化结构图如图 4.2 所示。

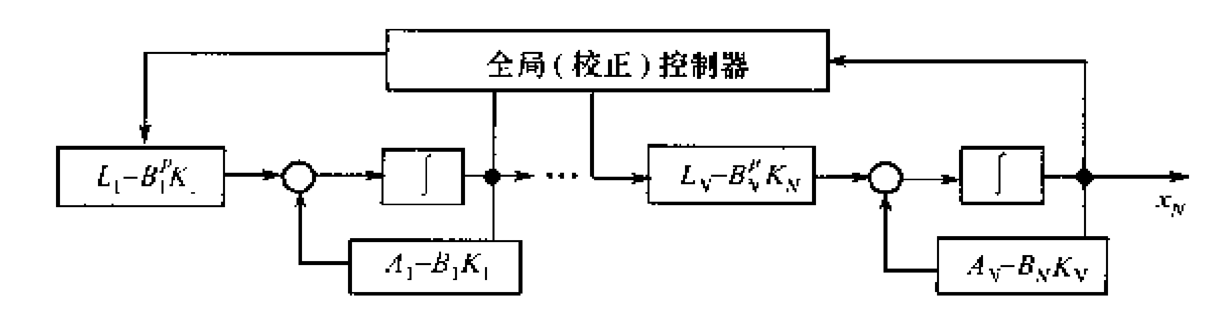


图 4.2　H_∞ 递阶优化结构图

下面给出 $\boldsymbol{B}^P$ 的确定方法。

定理 4.1　对一个非奇异矩阵 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L})$，令斜对称矩阵 $\boldsymbol{S}$ 为以下矩阵李亚普诺夫方程的解：

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}) + (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PL} = 0 \tag{4.27}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 为对角方块矩阵，　$\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}\{\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_N\}$

$n \times n$ 矩阵 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 由下式给定：

$$\hat{\boldsymbol{P}} = (\boldsymbol{S} - \boldsymbol{PL})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L})^{-1} \tag{4.28}$$

使得 $(\boldsymbol{P}+\hat{\boldsymbol{P}})$ 为一正定矩阵，则输入摄动矩阵为

$$\boldsymbol{B}^P = -(\boldsymbol{P}+\hat{\boldsymbol{P}})^{-1}\hat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{B} \tag{4.29}$$

$$\hat{J}(\cdot) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_0)(\boldsymbol{P}+\hat{\boldsymbol{P}})\boldsymbol{x}(t_0) \tag{4.30}$$

证明：已知如下摄动系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^P)\boldsymbol{u}(t) \tag{4.31}$$

令 $n \times n$ 对称正定矩阵 $\boldsymbol{F}$ 满足如下 Riccati 方程：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}) - \boldsymbol{FV}^P\boldsymbol{F} + \boldsymbol{Q} = 0 \tag{4.32}$$

式中　$\boldsymbol{V}^P = (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^P)\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^P)^{\mathrm{T}}$。很清楚，对于反馈控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L})\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{V}^P\boldsymbol{Fx}(t) \tag{4.33}$$

闭环控制 $\hat{\boldsymbol{u}}(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^P)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Fx}(t)$ 使其费用函数达到极小值 $\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_0)\boldsymbol{Fx}(t_0)$。

对于系统(4.33)必须满足如下关系：

$$R^{-1}(B + B^P)^{\mathrm{T}}F = \bar{P} = R^{-1}B^{\mathrm{T}}P \tag{4.34}$$

则(4.32) 可改写为

$$L^{\mathrm{T}}F + FL + A^{\mathrm{T}}(F - P) + (F - P)A = 0 \tag{4.35}$$

进一步有

$$RL + (F - P)(A + L) = S \tag{4.36}$$

式中因为$(F - L) = (S - PL)(A + L)^{-1}$为对称矩阵,所以 S 为斜对称矩阵。令 $\hat{P} = (F - P)$,则可以看出式(4.29) 中所定义的 B^F 满足关系(4.34)。因此,费用函数的极小值为

$$\hat{J}(t_0, x(t_0)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_0)Fx(t_0) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_0)(P + \hat{P})x(t_0)$$

证毕。

4.3 分散 H_∞ 控制

在这一节里,我们主要讨论大系统干扰衰减问题。通过探讨 H_∞ 控制理论和分散控制器之间的关系,从而导出大系统干扰有效衰减方法。这种方法涉及到直接嵌入 H_∞ 约束和在求解一组局部代数Riccati方程的基础上,设计分散的 H_∞ 局部控制器。这些方程可以通过对标准 Riccati 方程进行迭代计算来求解。并且我们可以证明,在系统状态可以得到的情况下,求解所有分散控制器的闭环传递函数的最小范数的问题可以近似简化为利用静态状态反馈来求解 H_∞ 次优解的问题。

4.3.1 系统描述和问题的形成

令 S 代表大系统,它由 N 个子系统S_i, $i = 1,2,\cdots,N$组成。每一个子系统 S_i 由下列方程描述:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_ix_i(t) + B_iu_i(t) + \sum_{j\neq i}^{N}A_{ij}(\sigma_j)x_j(t) + D_iw_i(t) \\ y_i(t) &= C_ix_i(t) \\ z_i(t) &= E_ix_i(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

这里 $A_i \in R^{n_i \times n_i}$，$B_i \in R^{n_i \times p_i}$ 分别代表系统矩阵和输入矩阵。$x_i \in R^{n_i}$ 代表状态，$u_i \in R^{m_i}$ 代表控制，$w_i \in R^{p_i}$ 代表干扰，$y_i \in R^{r_i}$ 代表测量输出，$z_i \in R^{q_i}$ 代表第 i 个子系统的受控输出。并且，$A_{ij}(\sigma_i) \in R^{n_i \times n_j}$ 代表第 i 个和第 j 个子系统之间的相互作用函数，σ_i 是集合 $\Pi_i \subset R^{l_i}$ 上的参数向量。在这一节的讨论中，假设 $A_{ij}(\sigma_i)$ 是线性时不变的。

假设 4.1 令

$$\left.\begin{aligned} &A_{ij}(\sigma_i) = M_i L_{ij}(\sigma_i) H_j \\ &F_i(\sigma_i) = [L_{i1}(\sigma_i) \quad L_{i2}(\sigma_i) \quad \cdots \quad L_{i,i-1}(\sigma_i) \\ &\qquad\qquad L_{i,i+1}(\sigma_i) \quad L_{iN}(\sigma_i)] \in \Theta_i^* \end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

这里 $M_i \in R^{n_i \times t_i}$，$H_j \in R^{s_j \times n_j}$ 刻画了相互作用的结论，$L_{ij}(\sigma) \in R^{t_i \times s_j}$，集合 Θ_i^* 定义如下：

$$\vartheta_i = \{\Theta_i^* \mid \boldsymbol{\Theta}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}_i \leqslant \boldsymbol{I}, \boldsymbol{\Theta}_i \text{ 的元素为 Lebesgue 可测的}\} \tag{4.39}$$

即 $F_i^{\mathrm{T}}(\sigma_i) F_i(\sigma_i) \leqslant I$。

在这一节中，假设所有的局部状态都是可测的。

假设 4.2 $C_i = I$ 并且 (A_i, B_i) 是可控的，$i = 1,2,\cdots,N$。

定义 4.2 给定常数 $\gamma_i > 0$。式(4.37)表示的大系统相对于干扰衰减 γ_i 称为是分散可稳定的，如果存在局部状态反馈矩阵 $K_i \in R^{n_i \times m_i}$，满足下述条件：

(a) 矩阵 $\hat{A} = A + BK$ 是一稳定矩阵。也就是说 $\hat{A}$ 的所有奇异值都位于左半开平面内，这里

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12}(\sigma_1) & \cdots & A_{1N}(\sigma_1) \\ A_{21}(\sigma_1) & A_2 & \vdots & A_{2N}(\sigma_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1}(\sigma_N) & A_{N2}(\sigma_N) & \cdots & A_N \end{bmatrix}$$

$$B = \mathrm{diag}[B_1, B_2, \cdots, B_N], \quad K = \mathrm{diag}[K_1, K_2, \cdots, K_N]$$

(b) 传递函数矩阵

$$T_{si}(s) = E(sI - \hat{A})^{-1}\hat{D}_i \tag{4.40}$$

满足限制条件

$$\| T_{Si}(s) \|_\infty \leqslant \gamma_i$$

这里 $E = \mathrm{diag}[E_1, E_2, \cdots, E_N]$ 和 $\hat{D}_i = [0, \cdots, 0 \quad D_i^{\mathrm{T}} \quad 0 \cdots 0]^{\mathrm{T}}$

定义 4.3 令 Q_i 和 R_i 为给定的正定矩阵，并给定常数 $\gamma_i > 0$。假如存在正标量 ε_i 和 η_i，使得方程

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i - \frac{1}{\varepsilon_i}P_iB_iR_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P_i + \gamma_i^{-2}P_iD_iD_i^{\mathrm{T}}P_i + E_i^{\mathrm{T}}E_i +$$

$$\eta_iP_iM_iM_i^{\mathrm{T}}P_i + \left(\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{\eta_j}\right)H_i^{\mathrm{T}}H_i + \varepsilon_iQ_i = 0 \tag{4.41}$$

有对称正定解 $P_i, i = 1, 2, \cdots, N$。则大系统(4.37) 在 γ_i 情况下称为满足局部代数 Riccati 方程。

有一点应该注意，式(4.41) 的对称正定解的存在性与 Q_i 和 R_i 的选择是无关的，也就是说，给定任意的正定矩阵 $\tilde{Q}_i$ 和 $\tilde{R}_i$，都存在一常数 $\varepsilon_i^* > 0$，使得方程

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i - \frac{1}{\varepsilon_i}P_iB_i\tilde{R}_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P_i + \gamma_i^{-2}P_iD_iD_i^{\mathrm{T}}P_i + E_i^{\mathrm{T}}E_i +$$

$$\eta_iP_iM_iM_i^{\mathrm{T}}P_i + \left(\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{\eta_j}\right)H_i^{\mathrm{T}}H_i + \bar{\varepsilon}_i\tilde{Q}_i = 0 \tag{4.42}$$

对所有 $\bar{\varepsilon}_i \in (0, \varepsilon_i^*]$ 都存在一正定解。即干扰衰减问题的可解条件独立于 Q_i 和 R_i 的选择。

4.3.2 分散控制的干扰衰减

下述的定理将给出大系统(4.37) 干扰衰减的完整解。

定理 4.2 令 $\gamma_i > 0$，并假设大系统(4.37) 在 $\gamma_i > 0$ 时满足代数 Riccati 方程。那么系统(4.37) 在干扰衰减 γ_i 下，$i = 1, 2, \cdots, N$ 是分散可稳的。并且所需局部反馈增益矩阵为

$$K_i = -\frac{1}{2\varepsilon_i}R_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P_i \tag{4.43}$$

这里的 P_i 是式(4.41) 的对称正定解。

证明:利用式(4.41)的对称正定解 P_i 来构造所需局部状态反馈矩阵(4.43),这样产生的闭环系统矩阵 $\hat{A} = A + BK$ 满足

$$\hat{A}^{\mathrm{T}}P + P\hat{A} = A^{\mathrm{T}}P + PA - \mathrm{diag}[\frac{1}{\varepsilon_1}I,\cdots,\frac{1}{\varepsilon_N}I]PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P =$$

$$- \mathrm{diag}[\frac{1}{\gamma_1^2}I,\cdots,\frac{1}{\gamma_N^2}I]PDD^{\mathrm{T}}P - E^{\mathrm{T}}E - \mathrm{diag}[\varepsilon_1 I,\cdots,\varepsilon_N I]Q +$$

$$A_{\mathrm{off}}^{\mathrm{T}}P + PA_{\mathrm{off}}^{\mathrm{T}} - \mathrm{diag}[\eta_1 I,\cdots,\eta_N I]PMM^{\mathrm{T}}P -$$

$$\mathrm{diag}[(\frac{1}{\eta_2} + \cdots + \frac{1}{\eta_N})I,\cdots,(\frac{1}{\eta_1} + \cdots + \frac{1}{\eta_{N-1}})I]H^{\mathrm{T}}H$$

这里

$$A_{\mathrm{off}} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12}(\sigma_1) & \cdots & A_{1N}(\sigma_1) \\ A_{21}(\sigma_2) & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & A_{N-1,N}(\sigma_{N-1}) \\ A_{N1}(\sigma_N) & \cdots & A_{N,N-1}(\sigma_N) & 0 \end{bmatrix}$$

M,H,Q,R 是由 M_i,H_i,Q_i,R_i 构成的分块对角矩阵,$i = 1,2,\cdots,N$。

因为

$$A_{\mathrm{off}}^{\mathrm{T}}P + PA_{\mathrm{off}} =$$

$$A_{\mathrm{off}}^{\mathrm{T}}\{\mathrm{diag}[P_1,0,\cdots,0] + \mathrm{diag}[0,P_2,0,\cdots,0] + \cdots + \mathrm{diag}[0,\cdots,0,P_N]\} +$$

$$\{\mathrm{diag}[P_1,0,\cdots,0] + \mathrm{diag}[0,P_2,0,\cdots,0] + \cdots + \mathrm{diag}[0,\cdots,0,P_N]\}A_{\mathrm{off}} =$$

$$\{M_1[0\quad L_{12}\quad\cdots\quad L_{1N}]\mathrm{diag}[0,H_2,\cdots,H_N]\}^{\mathrm{T}}[P_1\quad 0\quad\cdots\quad 0] +$$

$$[P_1\quad 0\quad\cdots\quad 0]^{\mathrm{T}}\{M_1[0\quad L_{12}\quad\cdots\quad L_{1N}]\mathrm{diag}[0,H_2,\cdots,H_N]\} +$$

$$\{M_2[L_{21}\quad 0\quad L_{23}\quad\cdots\quad L_{2N}]\mathrm{diag}[H_1,0,H_3,\cdots,H_N]\}^{\mathrm{T}}[0\quad P_2\quad 0\cdots 0] +$$

$$[0\quad P_2\quad 0\quad\cdots\quad 0]^{\mathrm{T}}\{M_2[L_{21}\quad 0\quad L_{23}\cdots L_{2N}]\mathrm{diag}[H_1,0,H_3,\cdots,H_N]\} +$$

$$\cdots + \{M_N[L_{N1}\quad\cdots\quad L_{N,N-1}\quad 0]\mathrm{diag}[H_1,\cdots,H_{N-1},0]\}^{\mathrm{T}}[0\quad\cdots\quad 0\quad P_N] +$$

$$[0\quad\cdots\quad 0\quad P_N]^{\mathrm{T}}\{M_N[L_{N1}\quad\cdots\quad L_{N,N-1}\quad 0]\mathrm{diag}[H_1,\cdots,H_{N-1},0]\} \leqslant$$

$$\eta_1\mathrm{diag}[P_1M_1M_1^{\mathrm{T}}P_1,0,\cdots,0] + \frac{1}{\eta_1}\mathrm{diag}[0,H_2^{\mathrm{T}}H_2,\cdots,H_N^{\mathrm{T}}H_N] +$$

$$\eta_2\mathrm{diag}[0,P_2M_2M_2^{\mathrm{T}}P_2,0,\cdots,0] + \frac{1}{\eta_2}\mathrm{diag}[H_1^{\mathrm{T}}H_1,0,H_3^{\mathrm{T}}H_3,\cdots,H_N^{\mathrm{T}}H_N] +$$

$$\cdots + \eta_N \mathrm{diag}[0,\cdots,0,\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{M}_N\boldsymbol{M}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_N] + \frac{1}{\eta_N}\mathrm{diag}[\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_1,\cdots,\boldsymbol{H}_{N-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{N-1},0] =$$

$$\mathrm{diag}[\eta_1\boldsymbol{I},\cdots,\eta_N\boldsymbol{I}]\boldsymbol{PMM}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \mathrm{diag}\Big[\Big(\frac{1}{\eta_2}+\cdots+\frac{1}{\eta_N}\Big)\boldsymbol{I},\cdots,\Big(\frac{1}{\eta_1}+\cdots+\frac{1}{\eta_{N-1}}\Big)\boldsymbol{I}\Big]\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}$$

于是有

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{A}} \leqslant -\mathrm{diag}[(\frac{1}{\gamma_1^2}\boldsymbol{I},\cdots,\frac{1}{\gamma_N^2}\boldsymbol{I}]\boldsymbol{PDD}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} - \mathrm{diag}[\varepsilon_1\boldsymbol{I},\cdots,\varepsilon_N\boldsymbol{I}]\boldsymbol{Q} < 0 \tag{4.44}$$

所以矩阵 $\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{A}}$ 是负定的。因此可以得到 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 是稳定矩阵。从式(4.44),定义 $\tilde{\boldsymbol{Q}}_i \geqslant 0$,

$$-\tilde{\boldsymbol{Q}}_i = \hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{A}} + \frac{1}{\gamma_i^2}\boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{D}}_i\hat{\boldsymbol{D}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} + \mathrm{diag}[\varepsilon_1\boldsymbol{I},\cdots,\varepsilon_N\boldsymbol{I}]\boldsymbol{Q} \leqslant 0$$

最后,我们可以得到

$$\boldsymbol{T}_{S_i}(-j\omega)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{S_i}(j\omega)^{\mathrm{T}} \leqslant \gamma_i^2\boldsymbol{I}$$

即
$$\|\boldsymbol{T}_{S_i}(s)\|_\infty \leqslant \gamma_i, i = 1,2,\cdots,N$$

证毕。

定理4.3 给定 $\gamma_i > 0$,并假定存在一常数 $\delta_i \in (0,\gamma_i)$ 使得大系统(4.37)在干扰衰减($\gamma_i - \delta_i$)下是分散可稳定的。那么大系统(4.37)在常数 γ_i 下,$i = 1,2,\cdots,N$ 一定满足代数 Riccati 方程(4.41)。

证明:从定义 4.2 可知

$$\hat{\boldsymbol{D}}_i^{\mathrm{T}}(-j\omega\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}(-j\omega\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{A}})^{-1}\hat{\boldsymbol{D}}_i \leqslant (\gamma_i - \delta_2)^2\boldsymbol{I} \leqslant (\gamma_i^2 - \gamma_i\delta_i)\boldsymbol{I}, \text{对所有 } \omega \in R。$$

则 Riccati 方程

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{\boldsymbol{P}}\hat{\boldsymbol{A}} + \frac{1}{\gamma_i^2}\bar{\boldsymbol{P}}\hat{\boldsymbol{D}}_i\hat{\boldsymbol{D}}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} < 0 \tag{4.45}$$

存在对称正定解 $\bar{\boldsymbol{P}}$。这里的 $\bar{\boldsymbol{P}}$ 不必要是分块对角形式。从式(4.45)

我们令

$$\boldsymbol{\Omega}:=\mathrm{diag}[\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{B}_N\boldsymbol{K}_N]^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}+\overline{\boldsymbol{P}}\mathrm{diag}[\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_N+\boldsymbol{B}_N\boldsymbol{K}_N]+\frac{1}{\gamma_i^2}\overline{\boldsymbol{P}}\hat{\boldsymbol{D}}_i\hat{\boldsymbol{D}}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}<-\boldsymbol{A}_{\mathrm{off}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}-\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{off}}$$

划分

$$\overline{\boldsymbol{P}}=\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{P}}_{11} & \overline{\boldsymbol{P}}_{12} & \cdots & \overline{\boldsymbol{P}}_{1N}\\ \overline{\boldsymbol{P}}_{12}^{\mathrm{T}} & \overline{\boldsymbol{P}}_{22} & \cdots & \overline{\boldsymbol{P}}_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{\boldsymbol{P}}_{1N}^{\mathrm{T}} & \overline{\boldsymbol{P}}_{2N}^{\mathrm{T}} & \cdots & \overline{\boldsymbol{P}}_{NN}\end{bmatrix}$$

并给定任意非零 $\boldsymbol{x}\in R^n$, $n=\sum_{i=1}^{n}n_i$,于是有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{x}<-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{off}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{off}}\boldsymbol{x}=-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{off}}\boldsymbol{x}$$

令

$$\boldsymbol{\Pi}_i=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & & & & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \boldsymbol{L}_{i+1,1}\sigma_{(i+1)} & \cdots & \boldsymbol{L}_{i+1,i}(\sigma_{i+1}) & 0 & \boldsymbol{L}_{i+1,i+2}(\sigma_{i+1}) & 0 & \boldsymbol{L}_{i+1,N}(\sigma_{i+1})\\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{L}_{N,1}(\sigma_N) & \cdots & \boldsymbol{L}_{N,i}(\sigma_N) & & \cdots & & 0\end{bmatrix}$$

并且有 $\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}:=[\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{x}_{i-1}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{x}_{i+1}^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}]$,那么

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{x}<-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Pi}_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{L}_{12}(\sigma_1) & \cdots & \boldsymbol{L}_{1N}(\sigma_1)\\ 0 & & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} \tag{4.46}$$

即

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Omega}+2\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Pi}_1\boldsymbol{H})\boldsymbol{x}<-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{P}}_{11}\\ \vdots\\ \overline{\boldsymbol{P}}_{1N}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{F}_1(\sigma_1)\mathrm{diag}[\boldsymbol{H}_2,\cdots,\boldsymbol{H}_N]\boldsymbol{v}_1$$

$\forall \quad F_1(\sigma_1) \in \Theta_1, x \in R^n, x \neq 0$。接下去有

$$x^{\mathrm{T}}(\Omega + 2\bar{P}M\Pi_1 H)x < -2\max\{x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\bar{P}_{11}\\ \vdots \\ \bar{P}_{1N}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\cdot$$

$$M_1 F_1(\sigma_1)\mathrm{diag}[H_2,\cdots,H_N]v_1: \quad F_1(\sigma_1) \in \Theta_1\} \leqslant 0$$

$\forall x \in R^n, x \neq 0$。所以

$$[x^{\mathrm{T}}(\Omega + 2\bar{P}M\Pi_1 H)x]^2 > 4\max\{[x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\bar{P}_{11}\\ \vdots \\ \bar{P}_{1N}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\cdot$$

$$M_1 F_1(\sigma_1)\mathrm{diag}[H_2,\cdots,H_N]v_1]^2: \quad F_1(\sigma_1) \in \Theta_1\} \tag{4.47}$$

故 $\forall x \in R^n, x \neq 0$。由地 $F_i^{\mathrm{T}}(\sigma_i)F_i(\delta_i) \leqslant I$ 可得

$$[x^{\mathrm{T}}(\Omega + 2\bar{P}M\Pi_1 H)x]^2 = 4x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\bar{P}_{11}\\ \vdots \\ \bar{P}_{1N}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\cdot$$

$$M_1 M_1^{\mathrm{T}}[\bar{P}_{11} \quad \cdots \quad \bar{P}_{1N}]xv_1^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}[H_2,\cdots,H_N]^{\mathrm{T}}\cdot$$

$$\mathrm{diag}[H_2,\cdots,H_N]v_1 = 4x^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\bar{P}_{11}\\ \vdots \\ \bar{P}_{1N}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\cdot$$

$$M_1 M_1^{\mathrm{T}}[\bar{P}_{11} \quad \cdots \quad \bar{P}_{1N}^{\mathrm{T}}]xx^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}[0,H_2,\cdots,H_N]^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}[0,H_2,\cdots,H_N]x$$

则存在 $\eta_1 > 0$,使得

$$\eta_1^2\begin{bmatrix}\bar{P}_{11}\\ \vdots \\ \bar{P}_{1N}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}M_1 M_1^{\mathrm{T}}[\bar{P}_{11} \quad \cdots \quad \bar{P}_{1N}] + \eta_1(\Omega + 2\bar{P}M\Pi_1 H) +$$

$$\mathrm{diag}[0, H_2^{\mathrm{T}}H_2,\cdots,H_N^{\mathrm{T}}H_N] < 0 \tag{4.48}$$

上述不等式(4.48)可以写成

同样存在 $\eta_i > 0, i = 1,2,\cdots,N$,使得$(\Omega + 2\bar{P}M\pi_1 H) +$

$$\eta_1\begin{bmatrix}\bar{P}_{11}\\ \vdots \\ \bar{P}_{1N}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}M_1 M_1^{\mathrm{T}}[\bar{P}_{11}\cdots\bar{P}_{1N}] + \frac{1}{\eta_1}\mathrm{diag}[0, H_2^{\mathrm{T}}H_2,\cdots,H_N^{\mathrm{T}}H_N] < 0,$$

因此有

$$\boldsymbol{\Omega}+\eta_1\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{P}}_{11}\\ \vdots\\ \overline{\boldsymbol{P}}_{1N}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}[\overline{\boldsymbol{P}}_{11}\ \cdots\ \overline{\boldsymbol{P}}_{1N}^{\mathrm{T}}]+$$

$$\eta_2\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{P}}_{12}\\ \overline{\boldsymbol{P}}_{22}\\ \vdots\\ \overline{\boldsymbol{P}}_{2N}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}[\overline{\boldsymbol{P}}_{12}\ \ \overline{\boldsymbol{P}}_{22}\ \cdots\ \overline{\boldsymbol{P}}_{2N}]+\cdots+$$

$$\eta_N\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{P}}_{1N}\\ \vdots\\ \overline{\boldsymbol{P}}_{N-1,N}^{\mathrm{T}}\\ \overline{\boldsymbol{P}}_{NN}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}_N\boldsymbol{M}_N^{\mathrm{T}}[\overline{\boldsymbol{P}}_{1N}\cdots\ \overline{\boldsymbol{P}}_{N-1,N}\ \ \overline{\boldsymbol{P}}_{NN}]+$$

$$\mathrm{diag}[(\frac{1}{\eta_2}+\cdots+\frac{1}{\eta_N})\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_1,\cdots,(\frac{1}{\eta_1}+\cdots+\frac{1}{\eta_{N-1}})\boldsymbol{H}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_N]<0 \tag{4.49}$$

选取式(4.49)的第(i,i)块，则存在$\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}=\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}^{\mathrm{T}}>0$，使得

$$(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}+\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)+\frac{1}{r_i^2}\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}+$$

$$\sum_{j=1}^{N}\eta_j\overline{\boldsymbol{P}}_{ij}\boldsymbol{M}_j\boldsymbol{M}_j^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}_{ij}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_i+(\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{\eta_j})\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_i<0$$

于是

$$\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}+\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}+\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i+\frac{1}{r_i^2}\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}+\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_i+$$

$$\eta_i\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{M}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}^{\mathrm{T}}+(\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{\eta_j})\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_i<-\sum_{j\neq i}^{N}\eta_j\overline{\boldsymbol{P}}_{ij}\boldsymbol{M}_j\boldsymbol{M}_j^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}_{ij}^{\mathrm{T}}\leqslant 0$$

所以，给定任一非零$\boldsymbol{x}_i\in R^{n_i}$满足$\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}\boldsymbol{x}_i=0$，由此可得

$$\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}+\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}\boldsymbol{A}_i+\frac{1}{r_i^2}\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}+\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_i+$$

$$\eta_i\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{M}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}_{ii}+(\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{\eta_j})\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_i\}\boldsymbol{x}_i<0 \tag{4.50}$$

对于上述不等式(4.50)使用Finsler定理,则有存在一常数$\sigma_i \geqslant 0$,使得

$$-\bar{Q}_i := A_i^{\mathrm{T}}\bar{P}_{ii} + \bar{P}_{ii}A_i + \frac{1}{r_i^2}\bar{P}_{ii}D_iD_i^{\mathrm{T}}\bar{P}_{ii} + E_i^{\mathrm{T}}E_i +$$

$$\eta_i\bar{P}_{ii}M_iM_i^{\mathrm{T}}\bar{P}_{ii} + (\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{\eta_j})H_i^{\mathrm{T}}H_i - \sigma_i\bar{P}_{ii}B_iB_i^{\mathrm{T}}\bar{P}_{ii}$$

是负定的。所以,正定矩阵$\bar{P}_{ii}$满足Riccati方程

$$A_i^{\mathrm{T}}\bar{P}_{ii} + \bar{P}_{ii}A_i + \frac{1}{r_i^2}\bar{P}_{ii}D_iD_i^{\mathrm{T}}\bar{P}_{ii} + E_i^{\mathrm{T}}E_i +$$

$$\eta_i\bar{P}_{ii}M_iM_i^{\mathrm{T}}\bar{P}_{ii} + (\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{\eta_j})H_i^{\mathrm{T}}H_i - \sigma_i\bar{P}_{ii}B_iB_i^{\mathrm{T}}\bar{P}_{ii} + \bar{Q}_i = 0 \tag{4.51}$$

令R_i和Q_i为任意正定加权矩阵,并选择常数$\varepsilon_i^* > 0$使得$R_i^{-1}/\varepsilon_i^* > \sigma_i I$,$\varepsilon_i^* Q_i < \bar{Q}_i$。Riccati方程(4.51)有正定解,这意味着方程

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i - \frac{1}{\varepsilon_i^*}P_iB_iR_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P_i + \frac{1}{\gamma_i^2}P_iD_iD_i^{\mathrm{T}}P_i + E_i^{\mathrm{T}}E_i +$$

$$\eta_iP_iM_iM_i^{\mathrm{T}}P_i + (\sum_{j\neq i}^{N}\frac{1}{\eta_j})H_i^{\mathrm{T}}H_i + \varepsilon_i^* Q_i = 0$$

也有正定解P_i。这样大系统(4.37)相对于常数γ_i满足代数Riccati方程。

第5章　H_∞优化方法的性质及其实现

5.1　静态反馈与动态反馈的最小范数等价性

在前面所运用的 H_∞ 优化算法中，实际上采用了静态状态反馈矩阵。那么，采用动态反馈还是采用静态反馈，是否会影响到 H_∞ 优化结果?下面的一条定理给出了答案。

定理 5.1　线性静态状态反馈构成的闭环传递函数的最小范数与所有稳定的动态状态反馈控制器(包括非线性时变)所构成的闭环传递函数的最小范数相等。

在对这个定理进行证明之前，我们首先给出一些定义和引理。

设有线性时不变系统

$$(\sum):\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{E}\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}\tag{5.1}$$

式中，$\boldsymbol{x}\in R^n$ 为系统状态，$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 为控制输入，$\boldsymbol{w}\in R^P$ 为干扰，$\boldsymbol{z}(t)\in R^q$ 为控制输出，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}$ 矩阵都是常值矩阵。

设系统的全部状态都是可观测的，且可测输出即为 $\boldsymbol{x}(t)$。系统 $\sum$ 的控制器既可以是静态的，也可以是动态的线性时不变状态反馈。

静态状态反馈：

$$(\sum{}_S):\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)\tag{5.2}$$

动态状态反馈：

$$(\sum_d):\begin{cases}\dot{v}(t) = Fv(t) + Gx(t)\\ u(t) = Hv(t) + Jx(t)\end{cases} \tag{5.3}$$

$$(F,G,H,J) \in R^{r\times r}\times R^{r\times n}\times R^{n\times r}\times R^{m\times n}$$

令从输入 w 到输出 z 的带有静态状态反馈控制律式(5.2) 的闭环传递函数为

$$T_s(s) = E[sI - (A + BK)]^{-1}D$$

定义 5.1 $r_s := \inf\{\|T_s\|_\infty ; K \in S\}$，这里 $S := \{K \in R^{m\times n} : A + BK$ 为稳定矩阵$\}$，同样，用 $T_d(s)$ 表示从输入 w 到输出 z 的带有动态状态反馈控制律式(5.3) 的闭环传递函数，且定义

$$r_d := \inf\{\|T_d\|_\infty ;(F,G,H,J) \in \Omega\}$$

这里 $\Omega = \{(F,G,H,T) \in R^{r\times r}\times R^{r\times n}\times R^{m\times r}\times R^{m\times n}$, $\begin{bmatrix}A + BJ & BH\\ G & F\end{bmatrix}$为稳定矩阵$\}$

这里给出两个附加假设：

(1) 系统可测输出为状态 $x(t)$；

(2) 这里没有从 $w(t)$ 和 $u(t)$ 到 $z(t)$ 的直接传递，也就是说从 u 和 w 到控制输出 z 的传递函数都是严格真的。

定义 5.2 给定常数 $r > 0$，系统 $\sum$ 称为稳定的，当干扰衰减为 r，且 $r > 0$ 为常数时，如果存在控制器 $\sum_s$ 使得闭环系统内部稳定，从 w 到控制输出 z 的闭环传递函数 T_s 满足

$$T_s^{\mathrm{T}}(-\mathrm{j}\omega)T_s(\mathrm{j}\omega) \leqslant r^2 I, \text{对于 } \omega \in R$$

定义 5.3 令 $Q \in R^{n\times n}$，$R \in R^{m\times n}$ 为给定正定矩阵。给定常数 $r > 0$，系统 $\sum$ 满足 ARE(Algbrica Riccati Equation) 带有衰减常数 r，假如存在 $\varepsilon > 0$，使 Riccati 方程

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - \frac{1}{\varepsilon}PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{r}PDD^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{r}EE^{\mathrm{T}} + \varepsilon Q = 0$$

有正定解 $P \in R^{n\times n}$。

引理5.1 假如系统式(5.1)在衰减常数为 r 时满足ARE,那么 $\sum$ 在干扰衰减常数为 r 时为可稳定,并且状态反馈矩阵为 $\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}/2\varepsilon$。相反,令 $r>0$ 为给定并假设存在常数 $\delta\in(0, r)$,使得系统 $\sum$ 在干扰衰减常数为 $r-\delta$ 时为可稳的,那么系统 $\sum$ 在干扰衰减常数为 r 时对于任意正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 都满足ARE。

引理5.2 考虑线性时不变系统式(5.1),给定常数 $r>0$,系统 $\sum$ 在衰减常数为 r 时对于任意正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 都满足ARE,当且仅当存在常数 $\alpha>0$ 和正定矩阵 $\boldsymbol{P}\in R^{n\times n}$ 及常值矩阵 $\boldsymbol{K}\in R^{m\times n}$,满足如下不等式

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\frac{1}{r}\boldsymbol{PEE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+$$

$$\frac{1}{r}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}]\boldsymbol{x}\leqslant-\alpha\|\boldsymbol{x}\|^{2},\forall\boldsymbol{x}\in R^{n} \tag{5.4}$$

证明定理5.1 显而易见 $r_s\geqslant r_d$,这里只需证 $r_s\leqslant r_d$。

设存在动态状态反馈控制器 $\sum_d$,使 $\|\boldsymbol{T}_d\|_\infty\leqslant r_d+\varepsilon$,从式(5.1)和式(5.3)可以看到闭环系统表示如下:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_a(t)&=\boldsymbol{A}_a\boldsymbol{x}_a(t)+\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{u}_a(t)+\boldsymbol{E}_a\boldsymbol{w}(t)\\\boldsymbol{u}_a(t)&=\boldsymbol{K}_a\boldsymbol{x}_a(t)\\\boldsymbol{z}_a(t)&=\boldsymbol{D}_a\boldsymbol{x}_a(t)\end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

$$\boldsymbol{x}_a(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}\in R^{n+r},\boldsymbol{u}_a(t)\in R^{r}$$

$$\boldsymbol{A}_a:=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BJ}&\boldsymbol{BH}\\0&\boldsymbol{F}\end{bmatrix}\in R^{(n+r)\times(n+r)},\boldsymbol{B}_a=\begin{bmatrix}0\\\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\in R^{(n+r)\times r}$$

$$\boldsymbol{E}_a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\0\end{bmatrix}\in R^{(n+r)\times p}\quad\boldsymbol{K}_a:=[G\ 0]\in R^{r\times(n+V)}$$

$$\boldsymbol{D}_a=[\boldsymbol{D}\ 0]\in R^{q\times(n\times r)}$$

很清楚
$$\|\boldsymbol{T}_d(j\omega)\|\leqslant r_d+\varepsilon\quad\forall\omega\in R$$

$$\boldsymbol{T}_d(s)=\boldsymbol{E}_a[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}_a+\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{K}_a)]^{-1}\boldsymbol{D}_a$$

$A_a + B_aK_a$ 为稳定矩阵。

定义 5.4 $r := r_d + 2\varepsilon$。

从定义 5.2 可以看出增广系统式(5.5)在衰减常数为 $r-\varepsilon>0$ 时是稳定的。从定义 5.3 和引理 5.1 可以得到系统式(5.5)在衰减常数为 r 时必须满足 ARE。从引理 5.2 得到下列不等式成立：

$$x_a^{\mathrm{T}}[P_a(A_a + B_aK_a) + (A_a + B_aK_a)^{\mathrm{T}}P_a + \frac{1}{r}P_aE_aE_a^{\mathrm{T}}P_a + \frac{1}{r}D_a^{\mathrm{T}}D_a]x_a \leqslant -\alpha \| x_a \|^2 \tag{5.6}$$

$\forall x_a \in R^{n+r}$，正定矩阵 $P_a \in R^{(n+1)\times(n+r)}$，常数 $\alpha > 0$

令 $S_a := P_a^{-1} > 0, y_a = D_ax_a$，式(5.6)可写成：

$$y_a^{\mathrm{T}}[A_aS_a + S_aA_a^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}E_aE_a^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}S_aD_a^{\mathrm{T}}D_aS_a]y_a + 2y_a^{\mathrm{T}}B_aK_aS_ay_a \leqslant -\beta \| y_a \|^2 \tag{5.7}$$

$\forall y_a \in R^{n+r}, \beta > 0$。由式(5.7)可得：

$$y_a^{\mathrm{T}}[A_aS_a + S_aA_a^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}E_aE_a^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}S_aD_a^{\mathrm{T}}D_aS_a]y_a \leqslant -\beta \| y_a \|^2, y_a \in \ker B_a^{\mathrm{T}}$$

$$\ker B_a^{\mathrm{T}} = \{[y^{\mathrm{T}} \quad 0]^{\mathrm{T}} \in R^{n+r},\ y \in R^n\} \tag{5.8}$$

和 $$S_a = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \dim S_1 = n \times n \\ \dim S_2 = n \times r \end{matrix} \quad \dim S_3 = r \times r$$

从式(5.7)得到

$$y^{\mathrm{T}}[(A + BJ)S_1 + S_1(A + BJ)^{\mathrm{T}} + BHS_2^{\mathrm{T}} + S_2H^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}EE^{\mathrm{T}} + \frac{1}{r}S_1D^{\mathrm{T}}DS_1]y \leqslant -\beta \| y \|^2 \tag{5.9}$$

这里 S_1 为正定矩阵，$P = S_1^{-1}$，定义 $K = J + HS_2^{\mathrm{T}}P$ (5.10)

利用转换 $f := S_1y$

从式(5.9)和式(5.10)可得到

$$f^{\mathrm{T}}[P(A + BK) + (A + BK)^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{r}PEE^{\mathrm{T}}P +$$

$$\frac{1}{r}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}]\boldsymbol{f} \leqslant -\delta \| \boldsymbol{f} \|^2 \tag{5.11}$$

$\forall \boldsymbol{f} \in R^n$ 及正常数δ。

根据引理5.1和5.2,存在形为式(5.2)的控制器使系统$\sum$在干扰衰减为r时分散稳定,因为r_s为静态状态反馈的极小范数,有$r_s \leqslant r$。从定义5.4中r的定义可得到$r_s \leqslant r_d + 2\epsilon$。由于$\epsilon$为任意的,所以有$r_s \leqslant r_0$。

这里就得到$r_s = r_d$。

5.2 最优控制方法与H_∞集中优化方法的比较

H_2和H_∞范数是两个最常用的衡量系统性能指标的量度,它们都是在频率域内用闭环系统传递函数矩阵定义。H_2优化控制理论发展于20世纪60年代,而H_∞优化理论则是它的继承和发展。下面将H_2和H_∞控制问题加以比较:

1. H_2范数和H_∞范数的定义和求法不同

考虑传递函数矩阵$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} & 0 \end{array}\right]$,$\boldsymbol{A}$为稳定的,$\boldsymbol{L}_c$表示$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$的可控矩阵,$\boldsymbol{L}_0$表示$(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A})$的可观测矩阵,则

$$\| \boldsymbol{G} \|_2^2 = \mathrm{trace}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{L}_c\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{trace}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_0\boldsymbol{B})$$

对于同样的传递函数矩阵$G(s)$,定义Hamiltonian矩阵$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$,有$\| \boldsymbol{G} \|_\infty < 1$当且仅当$\boldsymbol{H}$在虚轴上无特征值。因此$H_\infty$范数求法为:①给定一正数$\lambda$;②验证$\| \lambda^{-1}\boldsymbol{G} \|_\infty < 1$,即验证Hamiltonian矩阵虚轴上有无特征值;③增大或减小λ,重复上述步骤。由此可见,H_∞范数求法是一个搜索过程,而H_2范数可直接获得。

2. H_2和H_∞在处理带有二次型性能指标的线性时不变系统的最优控制问题

(1)H_2情况下

令系统为
$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u\end{cases}$$

(C_1, A)为可观测的，(A, B_2)为可稳的，$D_{12}^{\mathrm{T}}[C_1 \quad D_{12}] = [0, I]$

指标为 $\min\limits_{u \in L_2[0,\infty)} \| z \|_2^2$

$$G(s) = \left[\begin{array}{c:cc} A & B_1 & B_2 \\ \hdashline C_1 & 0 & D_{12}\end{array}\right]$$

Hamiltonian 矩阵为

$$H_2 := \begin{bmatrix} A & -B_2 B_2^{\mathrm{T}} \\ -C_1^{\mathrm{T}} C_1 & -A^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} H_2 \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric}) \\ X_2 = \mathrm{Ric}(H_2)\end{matrix}$$

定义 $F_2 = -B_2^{\mathrm{T}} X_2$；　$A_{F_2} = A + B_2 F_2$；　$C_{1F_2} = C_1 + D_{12} F_2$；

$$G_c(s) = \left[\begin{array}{c:c} A_{F2} & B_1 \\ \hdashline C_{1F_2} & 0\end{array}\right]$$

定理5.2　存在一个惟一的最优控制 $u = F_2 x$，使 $\min \| z \|_2 = \| G_c w_0 \|_2$

(2) H_∞ 情况

令$\begin{cases}\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u\end{cases}$　$w \in L_2[0,\infty)$，$\| w \|_2 \leqslant 1$

极小化 $\| z \|_2$。

定义 Hamiltonian 矩阵

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & B_1 B_1^{\mathrm{T}} - B_2 B_2^{\mathrm{T}} \\ -C_1^{\mathrm{T}} C_1 & -A^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

令
$$\alpha = \inf_{\| w \|_2 < 1} \sup \| z \|_2$$

定理5.3　限制 $\alpha < 1$，当且仅当 $H_\infty \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric})$，$\mathrm{Ric}(H_\infty) > 0$，并有控制律

$$u = F_\infty x, \quad F_\infty = -B_2^T X_\infty, \quad X_\infty = \mathrm{Ric}(H_\infty)$$

3. H_2 和 H_∞ 在求状态反馈控制器问题

这里我们假设系统状态 x 是全部可获得的,则 G 的实现为

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ I & 0 & 0 \end{array}\right]$$

并且 (1) (A, B_1) 可稳;

(2) (A, B_2) 可稳;

(3) (C_1, A) 可测;

(4) $D_{12}^T[C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I]$。

H_2 情况:寻找真实有理内部稳定控制器 K,使 $\|T_{zw}\|_2$ 极小化,与 5.2.2 中求法类似。

H_∞ 情况:寻找真实有理内部稳定控制器 K,使 $\|T_{zw}\|_\infty < 1$,并且仅当 $H_\infty \in \mathrm{dom(Ric)}$,$\mathrm{Ric}(H_\infty)$ 为正定矩阵,$K(s) = F_\infty$。

4. H_2 和 H_∞ 在求解输出反馈控制问题

可以验证,H_2 和 H_∞ 在求解输出反馈控制器问题上都具有分离结构。

5.3 代数 Riccati 方程的算法流程图

从上两小节的计算可以知道,无论是最优控制问题还是集中 H_∞ 优化问题,求解代数 Riccati 方程的解是至关重要的一个环节。代数 Riccati 方程的求解有很多种方法,如线性矩阵方程组解法、牛顿迭代法、特征值特征向量法、舒尔向量法等。这里介绍一种求解多变量系统的代数 Riccati 方程的行之有效的方法,即矩阵符号函数法。

代数 Riccati 矩阵方程的一般形式为

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \qquad (5.12)$$

这种方程的解 $\boldsymbol{P}$ 又叫 Riccati 微分方程的稳态解，且是一个定常矩阵。可以证明，若$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$能稳，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$能测，$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^T\geqslant 0,\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^T>0$，则方程(5.12)具有惟一对称正定(非负定)解 $\boldsymbol{P}$。下面介绍矩阵符号函数法：

定义 5.5 对于任何复标量 $\lambda=\alpha+\mathrm{j}\beta(\alpha\neq 0)$，其符号函数定义为

$$\mathrm{sign}(\lambda)=\frac{\alpha}{|\alpha|}=\begin{cases}1 & \alpha>0\\ -1 & \alpha<0\end{cases} \tag{5.13}$$

对于任何不具有虚轴上特征值的实方阵 $\boldsymbol{H}$，不论是它相似于对角形矩阵，还是相似于若当形矩阵，都有

$$\boldsymbol{S}_H=\mathrm{sign}(\boldsymbol{H})\triangleq\boldsymbol{W}\begin{bmatrix}\ddots & & 0\\ & \mathrm{sign}(\lambda_i) & \\ 0 & & \ddots\end{bmatrix}\boldsymbol{W}^{-1} \tag{5.14}$$

式(5.14)就是矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的符号函数的定义式，其中 $\boldsymbol{W}$ 是能使矩阵 $\boldsymbol{H}$ 相似于对角形或若当形的非奇异变换矩阵。

为了获取计算矩阵符号函数的公式，考察如下矩阵代数方程

$$\boldsymbol{S}^2-\boldsymbol{I}=0$$

应用牛顿迭代公式，令 $\quad\boldsymbol{S}_{H,0}=\boldsymbol{H},\boldsymbol{S}_{H,0}^{-1}=\boldsymbol{H}^{-1}$

则

$$\boldsymbol{S}_{H,k+1}=\boldsymbol{S}_{H,k}-(\boldsymbol{S}_{H,k}^2-\boldsymbol{I})(2\boldsymbol{S}_{H,k})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{S}_{H,k}+\boldsymbol{S}_{H,k}^{-1}),\quad k=0,1,2,\cdots$$

这样，矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的符号函数为

$$\boldsymbol{S}_H=\mathrm{sign}\boldsymbol{H}=\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{S}_{H,k+1} \tag{5.15}$$

证明式(5.15)成立，有如下定理。

定理 5.4 任何实方阵 $\boldsymbol{H}$，如果不具有虚轴上的特征值，均可通过如下迭代序列

$$\boldsymbol{S}_{H,0} = \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{S}_{H,0}^{-1} = \boldsymbol{H}^{-1}, \quad \boldsymbol{S}_{H,k+1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{S}_{H,k} + \boldsymbol{S}_{H,k}^{-1}), \quad k = 0,1,2,\cdots \tag{5.16}$$

使

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{S}_H = \mathrm{sign}(\boldsymbol{H}) = \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{S}_{H,k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}(\boldsymbol{S}_{H,k} + \boldsymbol{S}_{H,k}^{-1}) \\ &\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{S}_{H,k+1} = \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{S}_{H,k+1}^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

成立。

证明：不失一般性，设 $\boldsymbol{H}$ 可分解为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{J}\boldsymbol{W}^{-1}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 为如下所示若当形矩阵

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{W}$ 为相应的非奇异变换矩阵。引入辅助矩阵 $\boldsymbol{F}_{k+1}$：

$$\boldsymbol{F}_{k+1} \triangleq (\boldsymbol{S}_{H,k+1} - \boldsymbol{S}_H)(\boldsymbol{S}_{H,k+1} + \boldsymbol{S}_H)^{-1} \tag{5.18}$$

由迭代序列式(5.16)，将上式化为

$$\boldsymbol{F}_{k+1} = [\boldsymbol{S}_{H,k}^2 + \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{S}_H\boldsymbol{S}_{H,k}][\boldsymbol{S}_{H,k}^2 + \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{S}_H\boldsymbol{S}_{H,k}]^{-1}$$

考虑到 $\boldsymbol{S}_H^2 = \boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{S}_H$ 与 $\boldsymbol{S}_{H,k}$ 乘积可变换，则上式化为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{k+1} = &(\boldsymbol{S}_{H,k} - \boldsymbol{S}_H)(\boldsymbol{S}_{H,k} + \boldsymbol{S}_H)^{-1}(\boldsymbol{S}_{H,k} + \boldsymbol{S}_H)\cdot \\ &(\boldsymbol{S}_{H,k} - \boldsymbol{S}_H)[(\boldsymbol{S}_{H,k} + \boldsymbol{S}_H)^2]^{-1} = \\ &\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{S}_{H,k} - \boldsymbol{S}_H)(\boldsymbol{S}_{H,k} + \boldsymbol{S}_H)[(\boldsymbol{S}_{H,k} + \boldsymbol{S}_H)^2]^{-1} = \boldsymbol{F}_k^2 \end{aligned}$$

重复利用上式的运算关系，可得 $\boldsymbol{F}_{k+1} = \boldsymbol{F}_1^{2^k}$

由辅助矩阵定义式(5.18)和假定 $\boldsymbol{J}$ 是特征值均为 λ 的若当形

矩阵可知,矩阵 $\boldsymbol{F}_1$ 的特征值相同,且记为 $\boldsymbol{H}_{F1}$

$$\boldsymbol{H}_{F1}=\frac{\lambda_{H,1}-\operatorname{sign}(\lambda)}{\lambda_{H,1}+\operatorname{sign}(\lambda)},\qquad \lambda_{H,1}=\frac{1}{2}(\lambda+\lambda^{-1})$$

由上式知,辅助矩阵 $\boldsymbol{F}_1$ 的特征值模小于 1。由矩阵极限定理有

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{F}_{k+1}=\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{F}_1^{2^k}=0$$

$$\boldsymbol{S}_{H,k+1}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}_{k+1})^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}_{k+1})\boldsymbol{S}_H$$

所以由上两式必有 $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{S}_{H,k+1}=\boldsymbol{S}_H$

由此还有 $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{S}_{H,k+1}=\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{S}_{H,k+1}^{-1}$

证明完毕。

定理 5.5 任何实方阵 $\boldsymbol{H}$,如果不具有虚轴上的特征值,则均可以通过如下加速迭代序列:

$$\boldsymbol{S}_{H,0}=\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{S}_{H,0}^{-1}=\boldsymbol{H}^{-1},$$

$$\boldsymbol{S}_{H,k+1}=(\alpha_{H,k}\boldsymbol{S}_{H,k}+\beta_{H,k}\boldsymbol{S}_{H,k}^{-1}),\quad k=0,1,2,\cdots \tag{5.19}$$

使下式成立

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{S}_H=\operatorname{sign}(\boldsymbol{H})=\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{S}_{H,k+1}=\lim_{k\to\infty}(\alpha_{H,k}\boldsymbol{S}_{H,k}+\beta_{H,k}\boldsymbol{S}_{H,k}^{-1})\\&\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{S}_{H,k+1}=\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{S}_{H,k+1}^{-1}\end{aligned}\right\}\tag{5.20}$$

其中 $\alpha_{H,k}$ 和 $\beta_{H,k}$ 是可以选择的大于零的数。

定理 5.5 的证明与定理 5.4 的证明类似。

在迭代过程中,例如第 $k+1$ 步,适当选择 $\alpha_{H,k}$ 和 $\beta_{H,k}$,可以很好地加速迭代过程

$$\alpha_{H,k}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{S}_{H,k}^{-1}\|}{\|\boldsymbol{S}_{H,k}\|}},\qquad \beta_{H,k}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{S}_{H,k}\|}{\|\boldsymbol{S}_{H,k}^{-1}\|}}\tag{5.21}$$

并且随迭代过程的终结有

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_{H,k} = \lim_{k\to\infty}\beta_{H,k} = \frac{1}{2}$$

迭代过程的收敛条件由下式决定

$$\boldsymbol{S}_{H,k+1} = \boldsymbol{S}_{H,k+1}^{-1} \tag{5.22}$$

现在讨论用矩阵符号函数法求方程(5.12)的解 $\boldsymbol{P}$。首先讨论 $\boldsymbol{P}$ 与如下辅助矩阵 $\boldsymbol{F}$ 的关系

$$\boldsymbol{F} \triangleq \frac{1}{2}\left\{\mathrm{sign}(\boldsymbol{H}) + \begin{bmatrix} -\boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\right\} \tag{5.23}$$

如果系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$能稳,$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$能测,则有

$$\boldsymbol{S}_H = \mathrm{sign}(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{W}\begin{bmatrix} -\boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\boldsymbol{W}^{-1} \tag{5.24}$$

令
$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_{11} & \boldsymbol{W}_{12} \\ \boldsymbol{W}_{21} & \boldsymbol{W}_{22} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{W}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{11} & \boldsymbol{V}_{12} \\ \boldsymbol{V}_{21} & \boldsymbol{V}_{22} \end{bmatrix}$$

于是,辅助矩阵 $\boldsymbol{F}$ 可表示为

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{sign}(\boldsymbol{H}) + \begin{bmatrix} -\boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{W}_{11}\boldsymbol{V}_{11} & \boldsymbol{W}_{12}\boldsymbol{V}_{22} \\ -\boldsymbol{W}_{21}\boldsymbol{V}_{11} & \boldsymbol{W}_{22}\boldsymbol{V}_{22} \end{bmatrix}$$

将上式中的 $\boldsymbol{V}_{11}$,$\boldsymbol{V}_{22}$ 用 $\boldsymbol{W}_{11}$,$\boldsymbol{W}_{12}$,$\boldsymbol{W}_{21}$,$\boldsymbol{W}_{22}$ 来表示,可得

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{11} & \boldsymbol{F}_{12} \\ \boldsymbol{F}_{21} & \boldsymbol{F}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{W}_{12}\boldsymbol{W}_{22}^{-1}\boldsymbol{W}_{21}\boldsymbol{W}_{11}^{-1})^{-1} & (\boldsymbol{W}_{22}\boldsymbol{W}_{12}^{-1} - \boldsymbol{W}_{21}\boldsymbol{W}_{11}^{-1})^{-1} \\ -(\boldsymbol{W}_{11}\boldsymbol{W}_{21}^{2} - \boldsymbol{W}_{12}\boldsymbol{W}_{22}^{-1})^{-1} & (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{W}_{21}\boldsymbol{W}_{11}^{-1}\boldsymbol{W}_{12}\boldsymbol{W}_{22}^{-1})^{-1} \end{bmatrix}$$

则
$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}_{21}\boldsymbol{F}_{11}^{-1} \qquad \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{F}_{12}^{-1}(\boldsymbol{F}_{11} + \boldsymbol{I}) \\ &\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{F}_{22}^{-1}\boldsymbol{F}_{21} \qquad \boldsymbol{P} = (\boldsymbol{F}_{22} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{F}_{12}^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

用矩阵符号函数法计算 Riccati 代数方程解 $\boldsymbol{P}$ 的流程图如图 5.1 所示。

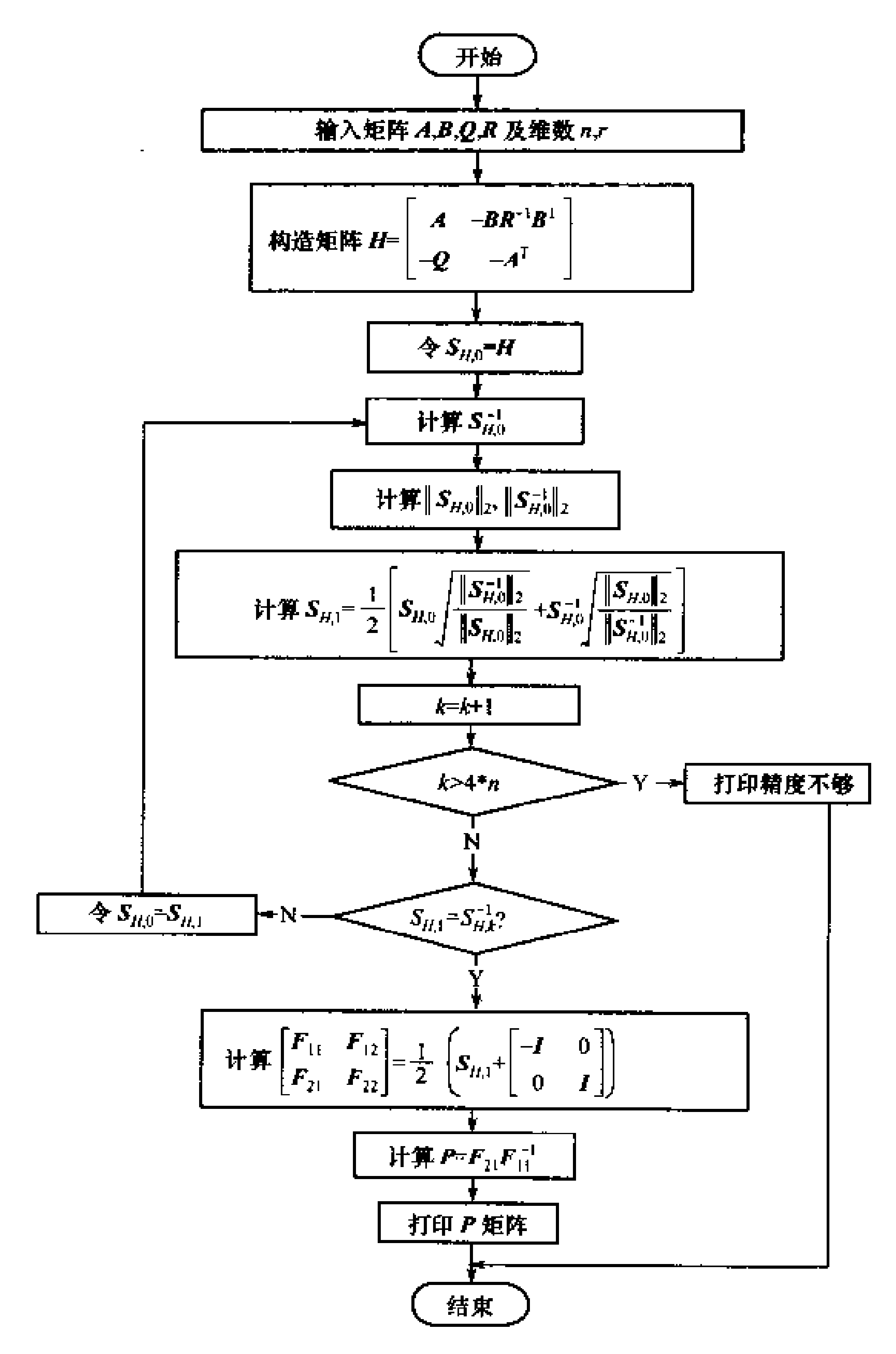


图 5.1　用矩阵符号函数法计算(Riccati)代数方程解 P 的程序框图

第6章 H_∞优化算法在飞机着陆控制中的应用

6.1 飞机的运动方程

飞机是一个极其复杂的动力学系统，严格、全面地描述飞机的运动模型是非常复杂甚至是不可能的。为了便于了解飞机运动的主要特性，在建立飞机的运动方程时，采用如下必要的、经实践证明是正确的简化假定：

(1) 把飞机看作刚体，即不考虑结构和弹性变形以及飞机中旋转部件(如发动机转子)的陀螺效应。

(2) 不考虑由于燃料消耗而造成的飞机质量和质心变化所引起的动力学效应。

(3) 把地球看成不旋转的、平坦的大地，即忽略地球旋转和曲率的影响。

(4) 把大气看作是平稳的。

有了上述简化假定，就可以建立飞机的运动模型。为清楚起见，先给出本章使用的几个主要坐标系的定义(本书全部采用英美坐标系)。

(1) 地面坐标系 $Ox_dy_dz_d$

简称地轴系。与地球表面相固连。原点 O 为在地面上适当选取的某点；z_d 轴铅垂向下；x_d、y_d 轴在水平面内，方向视具体情况而定。此外还定义飞机牵连地轴系 $Ox_d'y_d'z_d'$，其原点 O 在飞机质心；x_d'、y_d'、z_d' 轴分别平行于 x_d、y_d、z_d 轴。

(2) 机体坐标系 $Ox_ty_tz_t$

简称体轴系。原点 O 在飞机质心；x_t 轴在飞机对称平面内，沿结构纵轴指向图6.1中地轴系 $O\,x_dy_dz_d$、体轴系 $O\,x_ty_tz_t$ 及俯仰角 ϑ、偏航角 Ψ、滚转角 φ 的规定同前；z_t 轴在对称平面内，垂直于 x_t 轴指向下；y_t 轴垂直于对称平面，指向右。

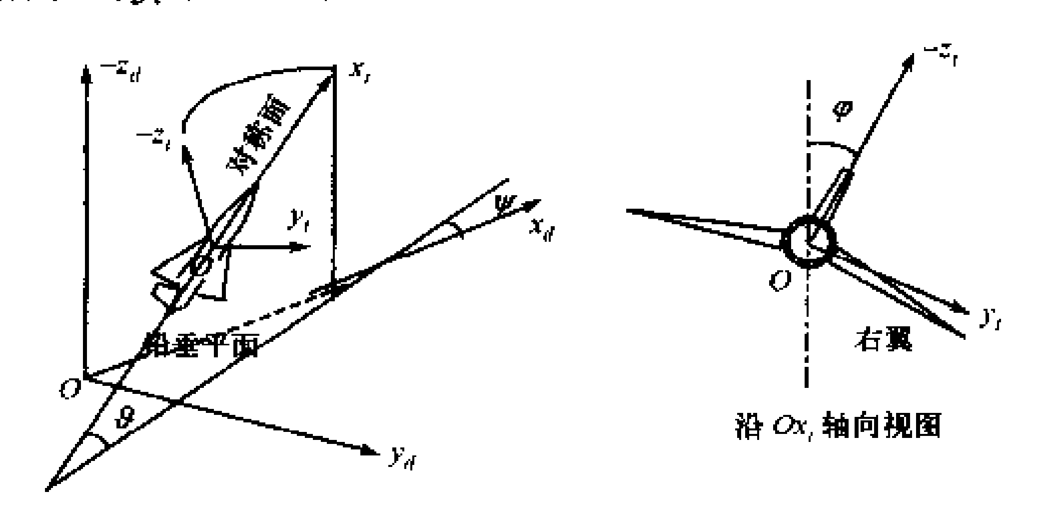


图 6.1　地面坐标系和机体坐标系

为了便于研究，本章建立飞机机体坐标系下的运动模型。根据力学定律，飞机质心的动力学方程为

$$m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{6.1}$$

其中 m 为飞机的质量，$\boldsymbol{V}$ 为飞机质心运动的绝对速度，$\boldsymbol{F}$ 是作用在飞机上的重力与空气动力之合力。写成分量形式为

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + qw - rv\right) &= F_x \\ m\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + ru - pw\right) &= F_y \\ m\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + pv - qu\right) &= F_z \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

其中 F_x、F_y、F_z 分别为 $\boldsymbol{F}$ 沿体轴系 x_t、y_t、z_t 轴上的投影分量；u、v、w 为飞机质心运动速度 $\boldsymbol{V}$ 沿此三个轴的投影分量；p、q、r 为飞机绕质心转动的角速度在上述三个轴上的投影分量。

用 A_x、A_y、A_z 分别表示作用在飞机上的空气动力所引起的沿

x_t、y_t、z_t 轴的加速度；用 g_x、g_y、g_z 分别表示重力加速度 g 沿 x_t、y_t、z_t 轴上的投影分量，可以得到

$$\left.\begin{aligned}\dot{u} &= -qw + rv + A_x + g_x \\ \dot{v} &= -ry + pw + A_y + g_y \\ \dot{w} &= -pv + qu + A_z + g_z\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

根据坐标变换的一般原理，可知

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_{td'} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{T}_{td'} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta\cos\psi & \cos\vartheta\sin\psi & -\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\vartheta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi\sin\vartheta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\vartheta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\vartheta \end{bmatrix}$$

为飞机牵连地轴系 $Ox'_dy'_dz'_d$ 到体轴系 $Ox_ty_tz_t$ 的坐标变换矩阵，ϑ 代表飞机的俯仰角，φ 为滚转角，ψ 为偏航角，统称为三个欧拉角（见图 6.1 关于飞机的俯仰角、偏航角及滚转角的规定）。由此得

$$\left.\begin{aligned}\dot{u} &= -qw + rv - g\sin\vartheta + A_x \\ \dot{v} &= -ru + pw + g\cos\vartheta\sin\varphi + A_y \\ \dot{w} &= -pv + qu + g\cos\vartheta\cos\varphi + A_z\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

考虑飞机绕质心的转动过程（见图 6.2），可知飞机的角速度向量在体轴系三个轴上的投影分量（p、q、r）应等于欧拉角速度在各轴上的投影分量之和。

首先使飞机牵连地轴系 $Ox'_dy'_dz'_d$ 绕 z'_d 轴转过偏航角 ψ，成为坐标系 $Ox'y'z'_d$；然后绕 y' 轴转过俯仰角 ϑ，成为坐标系 $Ox_ty'z'$；最后绕 x_t 轴转过滚转角 φ，成为机体坐标系 $Ox_ty_tz_t$。图6.2

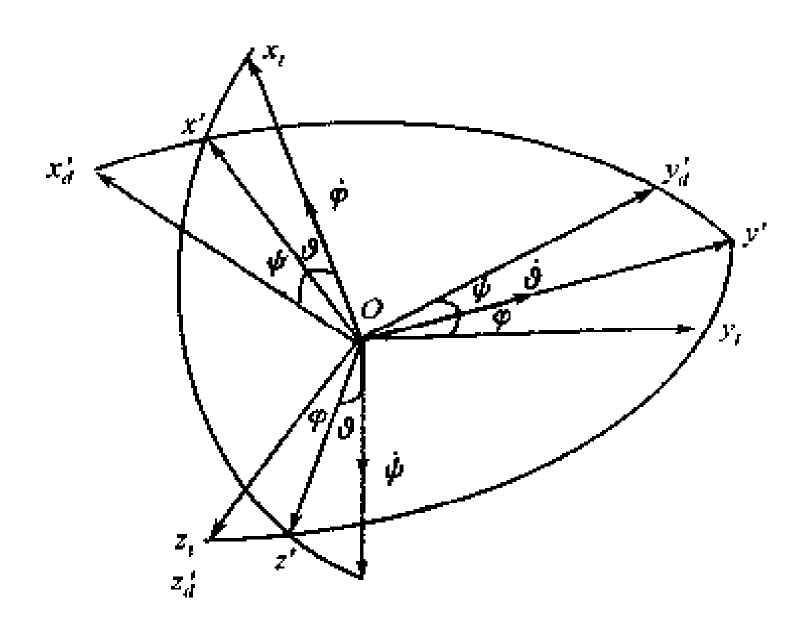


图 6.2　飞机牵连地面坐标系与机体坐标系之间的关系

中：$\dot{\vartheta}$—俯仰角速度，绕 y' 轴；$\dot{\psi}$—偏航角速度，绕 z'_d 轴；$\dot{\varphi}$—滚转角速度，绕 x_t 轴。

$\dot{\vartheta}$ 在 x_t、y_t 和 z_t 轴上的分量分别为

$$0,\dot{\vartheta}\cos\varphi,\ -\dot{\vartheta}\sin\varphi$$

$\dot{\psi}$ 在 x_t、y_t 和 z_t 轴上的分量分别为

$$-\dot{\psi}\sin\vartheta,\dot{\psi}\cos\vartheta\sin\varphi,\dot{\psi}\cos\vartheta\cos\varphi$$

而 $\dot{\varphi}$ 在 x_t、y_t 和 z_t 轴上的分量分别为

$$\dot{\varphi},0\ ,0$$

由此可得

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\vartheta & 1 \\ \cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

对式(6.5) 作变换得

$$
\begin{cases}
\dot{\vartheta} = q\cos\varphi - r\sin\varphi \\
\dot{\psi} = (q\sin\varphi + r\cos\varphi)/\cos\vartheta \\
\dot{\varphi} = q + (q\sin\varphi + r\cos\varphi)\tan\vartheta
\end{cases}
\tag{6.6}
$$

另外，飞机质心相对于地轴系各轴的速度分量 $\dot{x}_E$、$\dot{y}_E$、$\dot{z}_E$ 分别为

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_{td'}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}
$$

即

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{x}_E &= u\cos\vartheta\cos\psi + v(\sin\vartheta\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi) + w(\cos\varphi\sin\vartheta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) \\
\dot{y}_E &= u\cos\vartheta\sin\psi + v(\sin\varphi\sin\vartheta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi) + w(\cos\varphi\sin\vartheta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi) \\
\dot{z}_E &= -u\sin\vartheta + v\sin\varphi\cos\vartheta + w\cos\varphi\cos\vartheta
\end{aligned}
\right\}
\tag{6.7}
$$

这里我们对飞机的高度 h 较感兴趣，而 $h = -z_E$，因此可以得到飞机的基本运动方程为

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{u} &= -qw + rv - g\sin\vartheta + n_x g \\
\dot{v} &= -ru + pw + g\cos\vartheta\sin\varphi + n_y g \\
\dot{w} &= -pv + qu + g\cos\vartheta\cos\varphi + n_z g \\
\dot{h} &= u\sin\vartheta - v\sin\varphi\cos\vartheta - w\cos\varphi\cos\vartheta \\
\dot{\vartheta} &= q\cos\varphi - r\sin\varphi \\
\dot{\psi} &= p + (q\sin\varphi + r\cos\varphi)\tan\vartheta \\
\dot{\varphi} &= (q\sin\varphi + r\cos\varphi)/\cos\vartheta
\end{aligned}
\right\}
\tag{6.8}
$$

其中 n_x、n_y、n_z 为飞机运动中的三个过载系数，$n_x = A_x/g$，$n_y =$

A_y/g，$n_z = A_z/g$（g 为重力加速度常数）。

6.2　飞机运动方程的线性化

上节描述的飞机运动方程是一个高阶、非线性模型，直接分析很困难，一般来说只能利用计算机进行数值求解。为此，需要对方程作简化处理，使其既能够解析求解而又保持必要的工程精度，通常采用"小扰动法"对方程进行线性化。

由于各种干扰因素的影响，使飞机的运动参数偏离了基准运动参数，称为扰动运动。与基准运动差别甚小的扰动运动称为小扰动运动。

设某一个运动方程为

$$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = 0 \tag{6.9}$$

其中，某一运动参数 x_i 可以表示成基准运动参数x_{i0}和偏离量Δx_i之和 $x_i = x_{i0} + \Delta x_i$，

于是就有

$$f(x_{10} + \Delta x_1, x_{20} + \Delta x_2, \cdots, x_{n0} + \Delta x_n) = 0 \tag{6.10}$$

将方程(6.10)在基准运动点展成泰勒级数，略去二阶及二阶以上的小量，得到

$$f(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \Delta x_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 \Delta x_n = 0$$

式中$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0$代表导数在基准状态的取值。考虑到在基准运动点有

$$f(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}) = 0$$

因此

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \Delta x_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 \Delta x_n = 0$$

这是由非线性方程(6.9)简化后得到的一个线性化方程，称为线性化小扰动方程。方程中 $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$ 为变量，而各导数一般是通过理论或实验方法已经确定了的物理量。

由于纵向特性 n_x、n_z 只与 u、v、w、δ_e(升降舵偏角)及 δ_c(鸭翼偏角)有关,横侧向特性 n_y 只与 v、p、r、δ_a(副翼偏角)及 δ_r(方向舵偏角)有关,故有

$$n_x g = f_x(u,w,q,\delta_e,\delta_c)$$

$$n_z g = f_z(u,w,q,\delta_e,\delta_c)$$

$$n_y g = f_y(v,p,r,\delta_a,\delta_r)$$

将上面三个方程进行小扰动线性化,可得

$$n_x g = \left(\frac{\partial f_x}{\partial u}\right)_0 \Delta u + \left(\frac{\partial f_x}{\partial w}\right)_0 \Delta w + \left(\frac{\partial f_x}{\partial q}\right)_0 \Delta q + \left(\frac{\partial f_x}{\partial \delta_e}\right)_0 \Delta\delta_e + \left(\frac{\partial f_x}{\partial \delta_c}\right)_0 \Delta\delta_c$$

$$n_z g = \left(\frac{\partial f_z}{\partial u}\right)_0 \Delta u + \left(\frac{\partial f_z}{\partial w}\right)_0 \Delta w + \left(\frac{\partial f_z}{\partial q}\right)_0 \Delta q + \left(\frac{\partial f_z}{\partial \delta_e}\right)_0 \Delta\delta_e + \left(\frac{\partial f_z}{\partial \delta_c}\right)_0 \Delta\delta_c$$

$$n_y g = \left(\frac{\partial f_y}{\partial v}\right)_0 \Delta v + \left(\frac{\partial f_y}{\partial p}\right)_0 \Delta p + \left(\frac{\partial f_y}{\partial r}\right)_0 \Delta r + \left(\frac{\partial f_y}{\partial \delta_a}\right)_0 \Delta\delta_a + \left(\frac{\partial f_y}{\partial \delta_r}\right)_0 \Delta\delta_r$$

为简便,记 $n_x g$ 各项系数为 X_u、X_w、X_q、X_{δ_e}、X_{δ_c};$n_z g$ 各项系数为 Z_u、Z_w、Z_q、Z_{δ_e}、Z_{δ_c};$n_y g$ 各项系数为 Y_v、Y_p、Y_r、Y_{δ_a}、Y_{δ_r},且为了表示上的方便,将各变量中的"Δ"省略,如"Δu"仍记为"u"等,依此类推。在下面的推导中,将沿用这些符号。

这样我们就可对上节描述的飞机基本运动方程进行小扰动线性化。对于方程(6.8)中的第1式进行局部小扰动线性化后得到

$$\dot{u} = -q_0 w - w_0 q - g\vartheta\cos\vartheta_0 + X_u u + X_w w + X_q q + X_{\delta_e}\delta_e + X_{\delta_c}\delta_c + rv$$

将上式进行整理并考虑到在平衡点处有 $q_0 \approx 0$(以下同),可得

$$\dot{u} = X_u u + X_w w + (X_q - w_0)q - g\vartheta\cos\vartheta_0 + X_{\delta_e}\delta_e + X_{\delta_c}\delta_c + rv \tag{6.11}$$

同理,考虑到在平衡点处有 $p_0 \approx 0$、$r_0 \approx 0$、$\varphi_0 \approx 0$(以下同),方程(6.8)中的第2式线性化后就可得到

$$\dot{v} = Y_v v + (w_0 + Y_p)p + (Y_r - r_0)r + g\varphi\cos\vartheta_0\cos\varphi_0 + Y_{\delta_a}\delta_a + Y_{\delta_r}\delta_r \tag{6.12}$$

对方程(6.8)中的第3式进行局部小扰动线性化后得

$$\begin{aligned}\dot{w}= Z_u u + Z_w w + (u_0 + Z_q)q - \\ g\vartheta(\sin\vartheta_0\cos\varphi_0) + Z_{\delta_e}\delta_e + Z_{\delta_c}\delta_c - pv\end{aligned} \tag{6.13}$$

而对于方程(6.8)中的第4式局部线性化后得

$$\begin{aligned}\dot{h}= u\sin\vartheta_0 - w\cos\varphi_0\cos\vartheta_0 + \\ \vartheta w_0\sin\vartheta_0\cos\varphi_0 - v\sin\varphi\cos\vartheta\end{aligned} \tag{6.14}$$

方程(6.8)中的第5式的线性化结果为

$$\dot{\vartheta}= q\cos\varphi_0 \tag{6.15}$$

除上述几个方程外,还有三个气动力矩方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{p}&= N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta_a}\delta_a + N_{\delta_r}\delta_r \\ \dot{q}&= M_u u + M_w w + M_q q + M_{\delta_e}\delta_e + N_{\delta_c}\delta_c \\ \dot{r}&= L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta_a}\delta_a + L_{\delta_r}\delta_r\end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

当飞机纵向运动或对准跑道时,可将着陆问题简化为纵向运动,对方程(6.11)~方程(6.16)进行合理取舍,可得飞机着陆控制模型为

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&= X_u u + X_w w + (X_q - w_0)q - g\vartheta\cos\vartheta_0 + X_{\delta_e}\delta_e + X_{\delta_c}\delta_c + rv \\ \dot{w}&= Z_u u + Z_w w + (u_0 + Z_q)q - g\vartheta(\sin\vartheta_0\cos\varphi_0) + Z_{\delta_e}\delta_e + Z_{\delta_c}\delta_c - pv \\ \dot{q}&= M_u u + M_w w + M_q q + M_{\delta_e}\delta_e + M_{\delta_c}\delta_c \\ \dot{h}&= u\sin\vartheta_0 - w\cos\varphi_0\cos\vartheta_0 + \vartheta w_0\sin\vartheta_0\cos\varphi_0 - v\sin\varphi\cos\vartheta \\ \dot{\vartheta}&= q\cos\varphi_0\end{aligned}\right\}$$

$$\tag{6.17}$$

需要说明的一点是：由于飞机作纵向运动时 v/u 很小，所以在实际计算时可以认为 $v \approx 0$。考虑到本章下一节在建立飞机着陆控制随机系统模型时，要计入侧风的影响，因此这里保留了"rv"、"pv"及"$v\sin\varphi\cos\vartheta$"三项。

方程(6.17)的状态空间表达式为

$$
\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{h} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q - w_0 & 0 & -g\cos\vartheta_0 \\ Z_u & Z_w & u_0 + Z_q & 0 & -g\sin\vartheta_0\cos\varphi_0 \\ M_u & M_w & M_q & 0 & 0 \\ \sin\vartheta_0 & -\cos\varphi_0\cos\vartheta_0 & 0 & 0 & w_0\sin\vartheta_0\cos\varphi_0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ h \\ \vartheta \end{bmatrix} +
$$

$$
\begin{bmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_c} \\ Z_{\delta_e} & Z_{\delta_c} \\ M_{\delta_e} & M_{\delta_c} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} rv \\ -pv \\ 0 \\ -v\sin\varphi\cos\vartheta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.18}
$$

6.3 飞机着陆控制的随机系统模型

前面我们已经建立了平静大气中的飞机着陆模型，本节将在考虑阵风干扰的基础上，建立飞机着陆控制的随机系统模型。

风速是时间和地点的复杂函数，在地轴系上描述风速矢量最为直观

$$W = \begin{bmatrix} W_x(t) \\ W_y(t) \\ W_z(t) \end{bmatrix}_d$$

如图 6.3 所示,可用两个风向角 χ_W、ϕ_W 来描述风速矢量相对于地轴系的方向,即

$$\begin{bmatrix} W_x(t) \\ W_y(t) \\ W_z(t) \end{bmatrix}_d = \begin{bmatrix} \cos\phi_W \cos\chi_W \\ \cos\phi_W \sin\chi_W \\ \sin\phi_W \end{bmatrix} W$$

通常把 W_x、W_y、W_z 分别称为水平风、侧风和铅垂风。

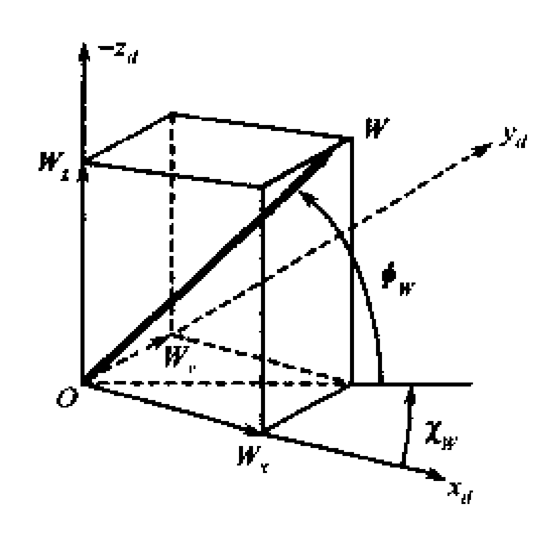


图 6.3　地轴系中的风速矢量

用下标"W"表示考虑阵风干扰时的情况,则此时飞机的各速度分量和不考虑阵风时的速度分量有如下关系:

$$\begin{bmatrix} u_W \\ v_W \\ w_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + T_{td'} \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}$$

将上述模型代入式(6.18)中,可得

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \hdashline \dot{q} \\ \dot{h} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \hdashline \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} u \\ w \\ \hdashline q \\ h \\ \vartheta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix} u + \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\xi} \tag{6.19}$$

其中 $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ 为干扰向量，$\boldsymbol{\Gamma}$ 为干扰矩阵。考虑到干扰矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 不可能精确给出，因此，在这里简单、合理地取

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_1 \\ \boldsymbol{\Gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} \\ \boldsymbol{A}_{21} \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

以下，我们通过某飞机着陆控制的实例，说明递阶控制的方法。某飞机着陆控制的随机系统模型可以表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{h} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.17 & -0.003 & -7.014 & 0 & -9.773 \\ -0.255 & 0.008 & 200.01 & 0 & -0.855 \\ 0.001 & -0.125 & -1.47 & 0 & 0 \\ 0.087 & -0.996 & 0 & 0 & 0.608 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ h \\ \vartheta \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 10.334 & -0.556 \\ 0.692 & 1.09 \\ -19.8 & 2.47 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.17 & -0.003 \\ -0.255 & 0.008 \\ 0.001 & -0.125 \\ 0.087 & -0.996 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

$$y = [u \quad w \quad q \quad h \quad \vartheta]^{\mathrm{T}} \tag{6.22}$$

由于 ξ 为随机干扰向量，我们无法估计它的具体大小，只能在限定气候飞行的条件下，给出 ξ 的上界。这样，我们就可以用 H_∞ 方法来设计式(6.22)的反馈控制器，并给出阵风干扰下的飞机着陆控制规律。

6.4 H_∞ 递阶控制的仿真计算

为了体现递阶控制的优越性，本节分别采用 H_∞ 关联预测递阶优化方法和结构摄动递阶优化方法对飞机在阵风干扰下着陆的控制问题进行仿真计算，并将结果与 H_∞ 集中优化方法作以比较。

式(6.21)表示的飞机着陆控制的随机系统模型中，系统的阶次为5阶，我们将其分为两个子系统，子系统的阶次分别为3阶和2阶。子系统的划分方法如式(6.23)所示

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.087 & -0.996 & 0 & 0.608 \\ 0 & -0.17 & -0.003 & -7.014 & -9.773 \\ 0 & -0.255 & 0.008 & 200.01 & -0.855 \\ 0 & 0.001 & -0.125 & -1.47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ u \\ w \\ q \\ \vartheta \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10.334 & -0.556 \\ 0.692 & 1.09 \\ -19.8 & 2.47 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.087 & -0.996 \\ -0.17 & -0.003 \\ -0.255 & 0.008 \\ 0.001 & -0.125 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

其中，子系统1为

$$
\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.47 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \vartheta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -19.8 & 2.47 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_c \end{bmatrix} +
$$

$$
\begin{bmatrix} 0.001 & -0.125 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}
$$

子系统 2 为

$$
\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.087 & -0.996 \\ 0 & -0.17 & -0.003 \\ 0 & -0.255 & 0.008 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ u \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10.334 & -0.556 \\ 0.692 & 1.09 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_c \end{bmatrix} +
$$

$$
\begin{bmatrix} 0.087 & -0.996 \\ -0.17 & -0.003 \\ -0.255 & 0.008 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}
$$

关联矩阵为

$$
G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.608 \\ 0 & 0 & 0 & -7.014 & -9.773 \\ 0 & 0 & 0 & 200.01 & -0.855 \\ 0 & 0.001 & -0.125 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

H_∞ 集中控制仿真结果如图 6.4 所示。

H_∞ 结构摄动递阶控制仿真流程如图 6.5 所示。仿真结果如图 6.6 所示。

H_∞ 集中控制的计算所得闭环系统的特征值为

$$
\lambda_{1,2} = -32.3277 \pm 21.8738\mathrm{j}
$$

$$
\lambda_{3,4} = -0.1236 \pm 0.05751\mathrm{j}
$$

$$
\lambda_5 = -1.8147
$$

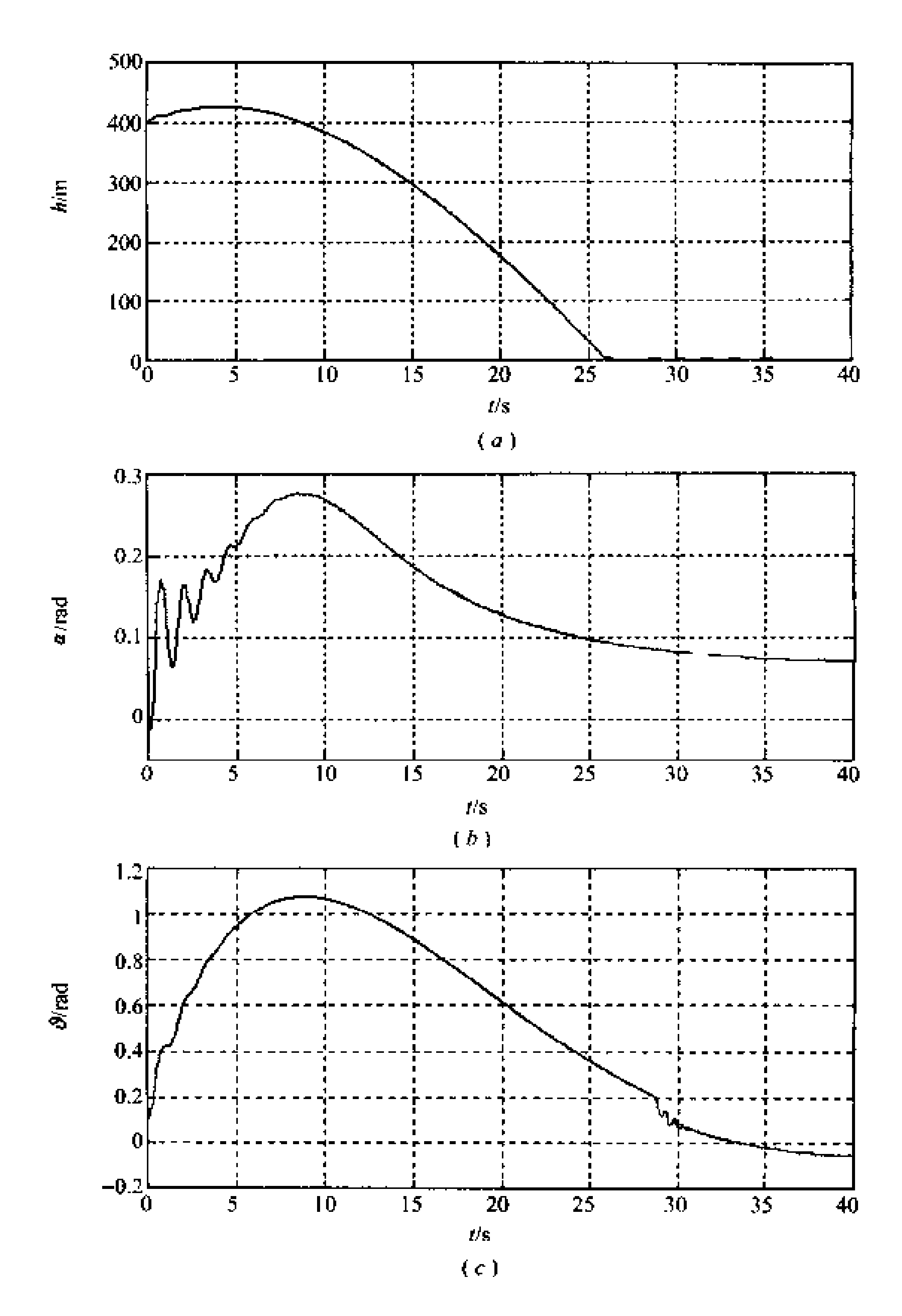


图 6.4 飞机阵风着陆的 H_∞ 关联预测递阶控制响应曲线

(*a*) 高度 h 的响应曲线;(*b*) 迎角 α 的响应曲线;(*c*) 俯仰角 ϑ 的响应曲线。

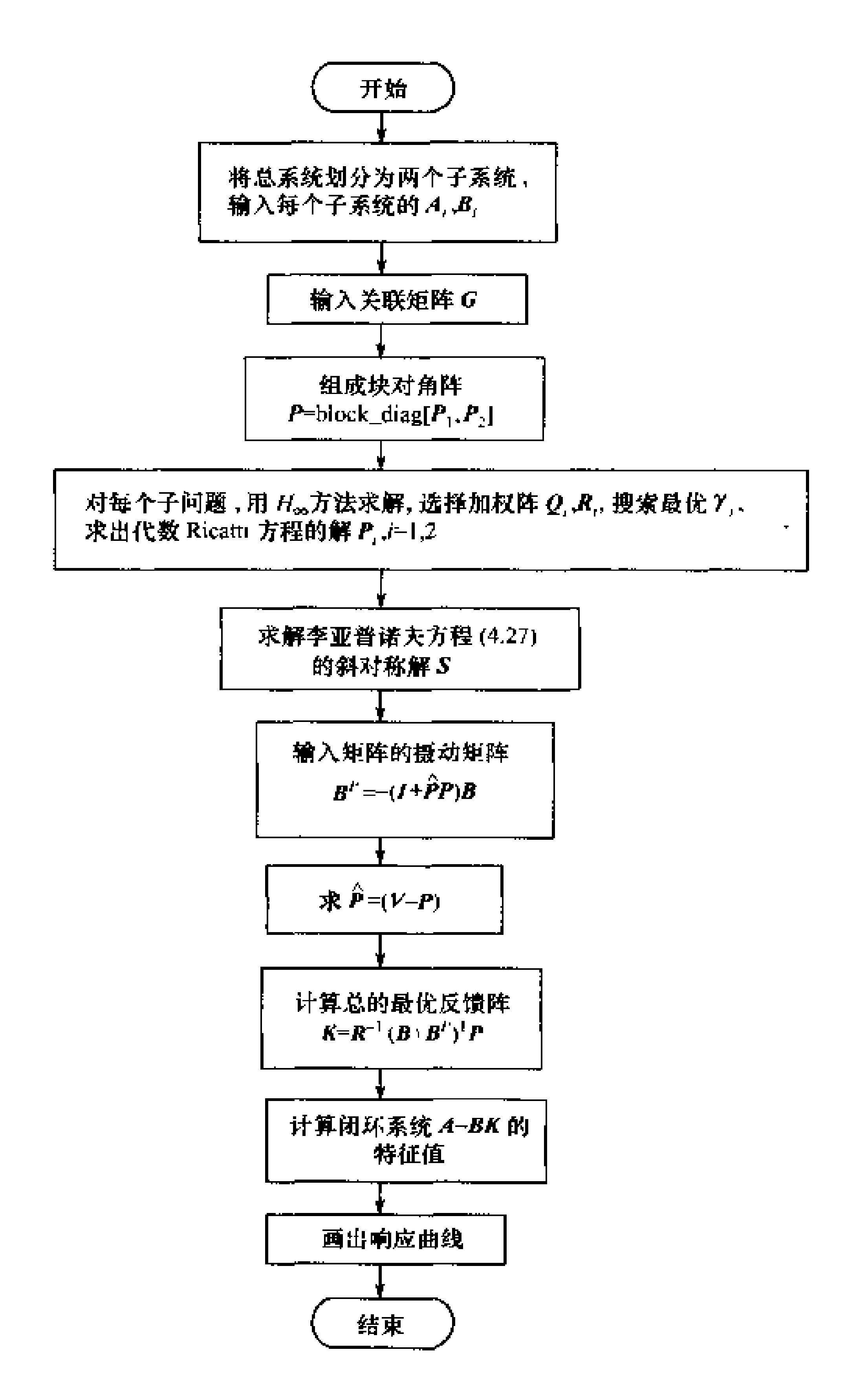


图 6.5　飞机阵风着陆的 H_∞ 结构摄动递阶控制方法仿真流程图

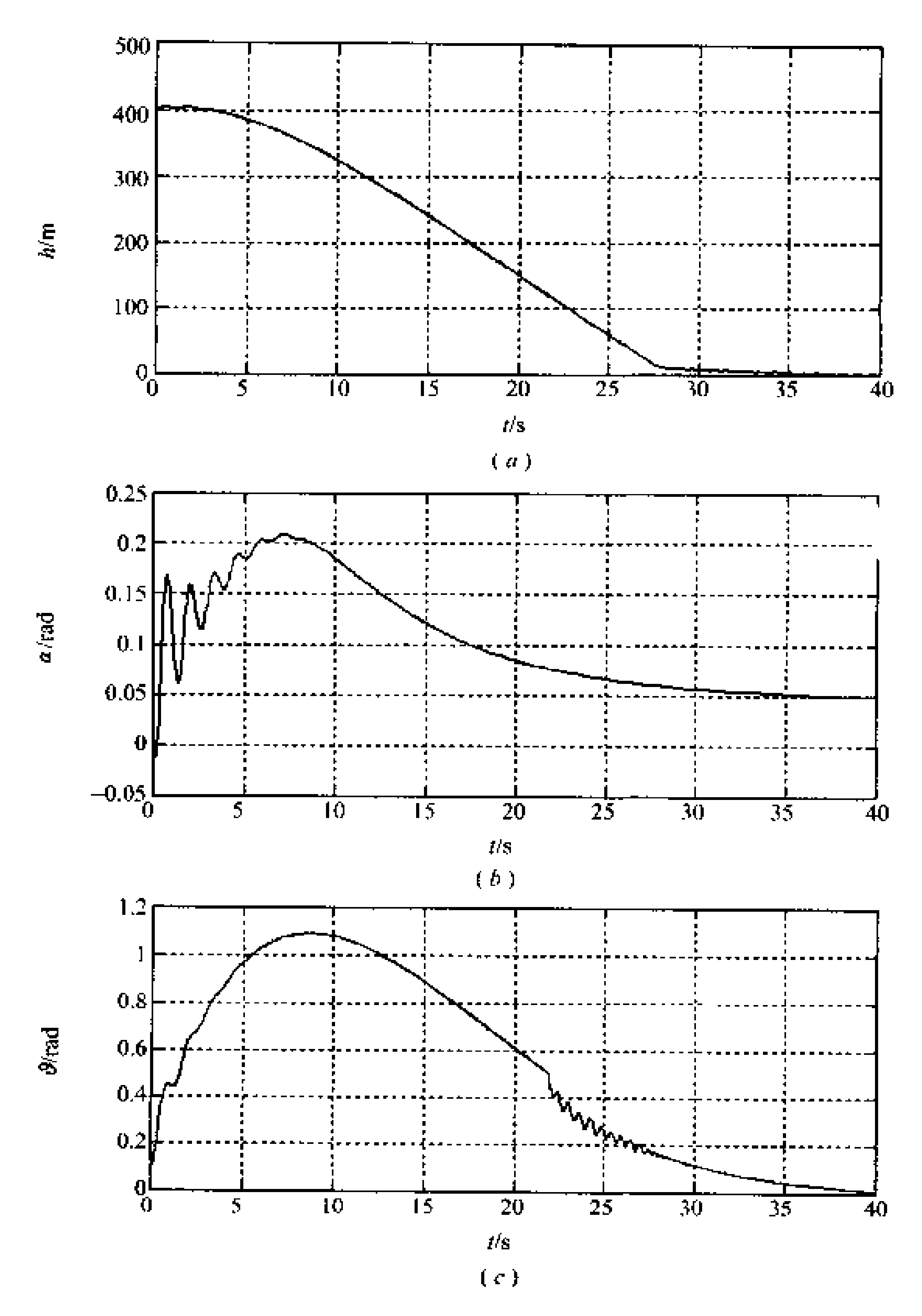


图 6.6　飞机阵风着陆的 H_∞ 结构摄动递阶控制响应曲线

(a) 高度 h 的响应曲线；(b) 迎角 α 的响应曲线；(c) 俯仰角 ϑ 的响应曲线。

H_∞ 结构摄动递阶控制的计算所得闭环系统的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -28.6930 \pm 19.9221j$$

$$\lambda_{3,4} = -0.0904 \pm 1.4362j$$

$$\lambda_5 = -1.2378$$

从仿真结果可以看出，与 H_∞ 集中优化算法相比，H_∞ 递阶优化算法的控制效果也是不错的，而这两种算法的计算工作量和要求的存储器空间相差却比较大。以 Ricatti 方程的求解为例，集中计算时，求出五阶解矩阵需要迭代 50 次以上，计算时所要求存储器空间较大；而采用 H_∞ 递阶优化算法，针对 3 阶和 2 阶的子系统，一般迭代次数不超过 20 次，所用的存储空间相对集中算法来说小得多。由此可以看出，H_∞ 递阶优化算法是行之有效的。

第 7 章 时滞系统的鲁棒控制

7.1 时滞系统的李亚普诺夫稳定性理论

设时滞系统的动态过程由如下非线性方程所描述

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_q)) \tag{7.1}$$

其中 $x(t) \in R^n$ 是状态变量，$x(t-\tau_i) \in R^n (i = 1,2,\cdots,q)$ 是滞后状态变量，$\tau_i \geqslant 0 (i = 1,2,\cdots,q)$ 为时间滞后，$f(t, x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_q))$ 是关于 t 的分段连续的 n 维向量函数，且满足对任意初始条件

$$x(t) = \varphi(t), \qquad t \in [t_0 - \tau_{\max}, t_0] \tag{7.2}$$

有惟一解，这里 $\tau_{\max} = \max\{\tau_1, \cdots, \tau_q\}$。

对于微分方程(7.1)，如果存在 $x^* \in R^n$，使得

$$f(t, \underbrace{x^*, \cdots, x^*}_{q+1}) = 0, \forall t \tag{7.3}$$

成立，则 x^* 是方程(7.1)的定常解，我们称 x^* 为系统或微分方程(7.1)的平衡点。

为了叙述简便，以下令 $x^* = 0$ 是方程(7.1)的平衡点，应该指出的是这样做对于研究系统(7.1)的稳定性并不失一般性。

定义 7.1 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，使得对于任意满足 $\|\varphi(t)\| < \delta(\varepsilon)$ 的初始条件(7.2)，方程(7.1)的解 $x(t)$ 满足

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geqslant t_0 \tag{7.4}$$

则称平衡点是稳定的。

定义 7.2　如果平衡点 $x^* = 0$ 是稳定的,且

$$\lim_{t \to +\infty} \| x(t) \| = 0 \tag{7.5}$$

则称平衡点 $x^* = 0$ 是渐近稳定的。

定义 7.3　如果平衡点 $x^* = 0$ 是稳定的,且存在实数 $\alpha > 0$ 和 $M > 0$,使得

$$\| x(t) \| < M e^{-\alpha(t-t_0)}, \forall t \geqslant t_0 \tag{7.6}$$

成立,则称平衡点 $x^* = 0$ 是指数渐近稳定的。

注记 7.1　上述定义中的稳定性是局部特性,即式(7.4) ~ 式(7.6) 只要求对于满足 $\| \varphi(t) \| < \delta(\varepsilon)$ 的初始条件(7.2) 成立。如果对于任意初始条件(7.2),当 $\delta(\varepsilon) \to +\infty$ 时,式(7.4) ~ 式(7.6) 成立,则相应地应该称为全局稳定,全局渐近稳定,全局指数渐近稳定。由于本节的目的并不是为了详细讨论非线性时滞系统稳定性的一般理论,而主要是为了后续几节中应用这里的概念和有关的结论。因此,在本章中,除必要之处外,不再区分全局稳定和局部稳定的有关概念,根据上下文内容,不难判断其意思。

注记 7.2　如果式(7.4) ~ 式(7.6) 对任意的时间滞后 $\tau_i \geqslant 0 (i = 1,2,\cdots,q)$ 均成立,则相应地称为时滞独立稳定,时滞独立渐近稳定,时滞独立指数稳定。一般地,实际工程中所说的稳定都指的是李亚普诺夫意义下渐近稳定,而李亚普诺夫意义下的稳定只是一种临界稳定,它在工程中被认为是不稳定的。因此,在本章中为了强调的时滞是一种不确定性,我们将李亚普诺夫意义下时滞独立渐近稳定性称为时滞独立鲁棒稳定性。

下面讨论系统方程(7.1) 时滞独立鲁棒稳定的条件。为了刻画这里的主要思想,我们仅讨论单一时间滞后的定常系统,即方程(7.1) 可表示为

$$x(t) = f(x(t), x(t-\tau)) \qquad f(0,0) = 0 \tag{7.7}$$

初始条件式(7.2) 化为

$$x(t) = \varphi(t), \qquad t \in [t_0 - \tau, t_0] \tag{7.8}$$

定义 7.4 设 $U \subseteq R^n$ 是原点 $x = 0$ 的一个邻域，$V(x)$ 为 U 上的连续函数，且满足：

(1) $V(0) = 0$;

(2) $V(x) \geqslant 0, \forall x \in U$;

(3) $V(x) = 0$，当且仅当 $x = 0$;

则称 $V(x)$ 为正定函数。仅有(1)和(2)成立时称 $V(x)$ 为半正定函数。

定理 7.1 $V(x)$ 为 U 上的正定函数的充分必要条件为存在单调非负且非减的连续函数 $\alpha(p)$ 和 $\beta(p)$ 使得

(1) $\alpha(0) = \beta(0) = 0$，当 $p \neq 0$ 时，$\alpha(p) \neq 0, \beta(p) \neq 0$

(2) $\alpha(\|x\|) \leqslant V(x) \leqslant \beta(\|x\|)$

成立。

证明　由定义 7.4 充分性显然成立。下面我们仅证明必要性，设 $V(x)$ 为 U 上的正定函数，令

$$\alpha(p) = \inf_{\|x\| \geqslant p} V(x), \beta(p) = \sup_{\|x\| \leqslant p} V(x)$$

则 $\alpha(p)$ 和 $\beta(p)$ 满足定理中的条件(1)和(2)，这里 inf 和 sup 分别表示下确界和上确界。

对于半正定函数也有类似的结论，我们这里就不再赘述。

定理 7.2 对于给定系统(7.7)，如果在平衡点 $x^* = 0$ 的一个邻域 U 内，存在连续可微的正定函数 $V_1(x)$ 和 $V_2(x)$，以及半正定函数 $V_3(x)$ 使得

$$V(t, x(t)) = V_1(x(t)) + \int_{t-\tau}^{t} V_3(x(s))\mathrm{d}s \tag{7.9}$$

沿着任意初始条件(7.8)的解 $x(t)$，对时间的导数满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t, x(t)) \leqslant - V_2(x,(t)) < 0 \tag{7.10}$$

则系统(7.7)的平衡点 $x^* = 0$ 是时滞独立鲁棒稳定的。

证明　由定理7.1,存在单调非负且非减的连续函数 $\alpha_i(p)$ 和 $\beta_i(p)(i=1,2,3)$ 满足条件:

(1) $\alpha_i(\|x\|) \leqslant V_i(x) \leqslant \beta_i(\|x\|), i=1,2,3$

(2) $\alpha_i(0)=\beta_i(0)=0, i=1,2,3$; 且当 $p \neq 0$ 时, $\alpha_i(p) \neq 0, \beta_i(p) \neq 0, i=1,2$。

下面分两部分来证明该定理。

首先,证明系统式(7.7)的平衡点 $x^*=0$,对于任意的时间滞后量 τ 在李亚普诺夫意义下的稳定性。由于 $\alpha_i(p)$ 和 $\beta_i(p)(i=1,2,3)$ 均为单调非负且非减的连续函数,所以,对任意给定的 $\varepsilon>0$ 和任意给定的时间滞后量 τ,总能找到 $\delta(\varepsilon)>0$,使得

$$\beta_1(\delta(\varepsilon))+\tau\beta_3(\delta(\varepsilon))<\alpha_1(\varepsilon) \tag{7.11}$$

由式(7.10),对于一切 $t \geqslant t_0$,有

$$V(t,x(t))-V(t_0,x(t_0))=\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t,x(t))\mathrm{d}t<0 \tag{7.12}$$

因此,对于任意的初始时刻 t_0 和满足 $\|\varphi(t)\|<\delta(\varepsilon)(\forall t \in [t_0-\tau,t_0])$ 的初始条件式(7.8),当 $t \geqslant t_0$ 时,系统式(7.7)的解满足

$$V(t,x(t))<V(t_0,x(t_0)) \leqslant \beta_1(\delta(\varepsilon))+\tau\beta_3(\delta(\varepsilon)) \tag{7.13}$$

利用式(7.9),式(7.11)和式(7.13),以及(c1)可得

$$\alpha_1(\|x\|)<\alpha_1(\varepsilon) \tag{7.14}$$

由 $\alpha_1(p)$ 函数的单调连续非减特性

$$\|x\|<\varepsilon, t \geqslant t_0 \tag{7.15}$$

所以,根据定义7.1,系统(7.7)的平衡点 $x^*=0$,对于任意的时

间滞后量 τ 在李亚普诺夫意义下是稳定的。

其次，证明系统(7.7)的平衡点 $x^* = 0$ 是时滞独立鲁棒稳定的。由于前一段已证明了系统(7.7)的平衡点 $x^* = 0$ 在李亚普诺夫意义下是时滞独立稳定的。下面仅证明对于任意给定的时间滞后量 $\tau \geqslant 0$，任意的初始时刻 t_0 和满足 $\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| < \delta(\epsilon)(\forall t \in = [t_0 - \tau, t_0]$ 的初始条件(4.2.8)，当 $t \geqslant t_0$ 时，系统(7.7)的解 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi}([t_0 - \tau, t_0]))$ 满足

$$\lim_{t \to +\infty} \|\boldsymbol{x}(t)\| = \lim_{t \to +\infty} \|\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi}([t_0 - \tau, t_0]))\| = 0 \tag{7.16}$$

我们用反证法证明上式成立。假设式(7.16)不成立，则连续函数 $\alpha_2(\|\boldsymbol{x}\|)$ 沿着系统(7.7)的满足 $\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| < \delta(\epsilon)(\forall t \in [t_0 - \tau, t_0])$ 的初始条件(7.8)的解有大于零的下确界，即存在正数 $l > 0$，使下式成立

$$V_2(\boldsymbol{x}) \geqslant \alpha_2(\|\boldsymbol{x}\|) \geqslant l > 0, \forall t \geqslant t_0 \tag{7.17}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\boldsymbol{x}) \leqslant - V_2(\boldsymbol{x}) \leqslant - \alpha_2(\|\boldsymbol{x}\|) \leqslant - l < 0, \forall t \geqslant t_0 \tag{7.18}$$

从 t_0 到 t 积分上式可得

$$V(t, \boldsymbol{x}(t)) - V(t_0, \boldsymbol{x}(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(t, \boldsymbol{x}(t)) \mathrm{d}t \leqslant \int_{t_0}^{t} - l \mathrm{d}t = - l(t - t_0) \tag{7.19}$$

即

$$V(t, \boldsymbol{x}(t)) \leqslant V(t_0, \boldsymbol{x}(t_0)) - l(t - t_0) \tag{7.20}$$

由于 $V(t_0, \boldsymbol{x}(t_0))$ 有界，因此当 t 足够大时 $V(t, \boldsymbol{x}(t)) < 0$，这与

$V(t, x(t)) \geqslant V_1(x)$ 矛盾,故式(7.16)成立。

综上所述,由定义7.2,系统(7.7)的平衡点 $x^* = 0$ 是时滞独立鲁棒稳定的。

注记 7.3 定理7.2是时滞系统的李亚普诺夫稳定性主定理,是本章的基础。它不仅给出了判断时滞系统李亚普诺夫意义下渐近稳定的的充分条件,而且给出了构造时滞系统李亚普诺夫函数的一般方法。

定理 7.3 对于给定的系统(7.7),如果在平衡点 $x^* = 0$ 的一个邻域 U 内,存在连续可微的正定函数 $V(x)$ 满足

(1) $r_1 \| x \|^2 \leqslant V(x) \leqslant r_2 \| x \|^2, \forall x \in U$ (7.21)

(2) 对于任意给定的时间滞后量 $\tau \geqslant 0$, $V(x)$ 沿着系统在初始条件(7.8)下的解 $x(t)$ 对时间的导数满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x) \leqslant -\mu \| x \|^2, \forall x \in U \tag{7.22}$$

其中 $r_1 > 0, r_2 > 0, \mu > 0$ 为给定常数,则系统(7.7)的平衡点 $x^* = 0$ 时滞独立指数鲁棒稳定的。

证明 由式(7.21)和式(7.22)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x) \leqslant -\frac{\mu}{r_2}V(x), \forall x \in U \tag{7.23}$$

积分式(7.23),我们有

$$V(x) \leqslant V(x_0)\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)} \tag{7.24}$$

这里, $x_0 = x(t_0) = \varphi(t_0), \alpha = \frac{\mu}{r_2}$,再一次利用式(7.21)

$$\| x(t) \| \leqslant M\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)} \tag{7.25}$$

其中 $M = V(x_0)/r_1$,根据定义7.3,系统(7.7)的平衡点 $x^* = 0$ 时滞独立指数鲁棒稳定的。

7.2 线性时滞系统的鲁棒控制

7.2.1 鲁棒稳定性分析

考虑由如下方程描述的线性定常时滞系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t-\tau),\tau\geqslant 0 \tag{7.26}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 为状态变量，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_1\in R^{n\times n}$ 为定常矩阵，$\tau\geqslant 0$ 为时间滞后量。

为了证明系统(7.26)时滞独立鲁棒稳定性的有关结论，我们需要下述几个引理。

引理 7.1 设 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 为两个相同维数的实数列向量，则对于任意的标量 $\lambda>0$，下式成立

$$2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}\leqslant\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}+\lambda\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta} \tag{7.27}$$

证明 对于任意的标量 $\lambda>0$，由于

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\boldsymbol{\xi}-\sqrt{\lambda}\boldsymbol{\eta}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\boldsymbol{\xi}-\sqrt{\lambda}\boldsymbol{\eta}\right)\geqslant 0$$

所以

$$\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}-2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}+\lambda\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}\geqslant 0$$

即式(7.27)成立。

引理 7.2 $\boldsymbol{A}$ 是渐近稳定的，且 $\|\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\|_\infty<1$ 的充分必要条件是存在标量 $\lambda>0$ 和对称正定阵 $\boldsymbol{X}$ 满足下列 Riccati 不等式方程

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\lambda\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}<0 \tag{7.28}$$

这里 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为适当维数的定常矩阵。

引理 7.3 存在标量 $\lambda > 0$ 和对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 Riccati 不等式方程(7.28)的充分必要条件为存在标量 $\varepsilon > 0$,使代数 Riccati 方程

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} + \varepsilon\boldsymbol{I} = 0 \quad (7.29)$$

存在惟一的对称正定矩阵解 $\boldsymbol{X}$。

关于引理 7.2 和引理 7.3 的证明,可参考文献[1]。

我们总可以将系统(7.26)中的定常矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 分解为两个适当维数的矩阵之积,即存在两个适当维数的矩阵 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 使

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{E}\boldsymbol{F} \quad (7.30)$$

做到这一点是很容易的,例如可取 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}_1$ 或 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}$。一般地,如果 $\boldsymbol{E}$ 列满秩,$\boldsymbol{F}$ 行满秩,且它们的秩均等于 $\boldsymbol{A}_1$ 的秩,那么下面得到的结论保守性较小。

定理 7.4 如果存在标量 $\lambda > 0$ 和对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使下列 Riccati 不等式方程

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} < 0 \quad (7.31)$$

成立,那么系统(7.26)是时滞独立鲁棒稳定的。

证明　设 λ 和 $\boldsymbol{X}$ 分别为满足式(7.31)的标量和对称正定矩阵,我们构造如下李亚普诺夫泛函

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{x} + \lambda\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s \quad (7.32)$$

并令

$$\boldsymbol{Q} = -\left(\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\right) > 0 \quad (7.33)$$

式(7.32)沿系统(7.26)的解,对时间的求导数

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{XA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\boldsymbol{x}(t) + \lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Fx}(t) - \lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Fx}(t-\tau) + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{XA}_1\boldsymbol{x}(t-\tau) \tag{7.34}$$

对式(7.34)的最后一项，利用式(7.30)和引理7.1

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{XA}_1\boldsymbol{x}(t-\tau) = 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{XE}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{x}(t-\tau) \leqslant \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{XE}_1\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Xx}(t) + \lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{x}(t-\tau) \tag{7.35}$$

将式(7.35)代入式(7.34)，并利用式(7.33)进行整理可得

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} \leqslant -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Qx}(t)$$

根据稳定性定理7.2，系统(7.26)是时滞独立鲁棒稳定的。

注记7.4 由引理7.2和引理7.3，定理7.4中条件的判断可通过解一代数Riccati方程或者求一个线性系统的传递函数的H_∞范数。而这两种判断方法在Matlab工具箱中有标准的软件，因此，该方法使用起来比较容易。

如果标称系统状态矩阵$\boldsymbol{A}$是渐近稳定的，那么存在对称正定矩阵$\boldsymbol{P}$，使下述李亚普诺夫方程成立

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{PA} = -2\boldsymbol{I} \tag{7.36}$$

定理7.5 系统(7.26)是时滞独立鲁棒稳定的，如果

$$\|\boldsymbol{PA}_1\|_2 < 1 \tag{7.37}$$

这里矩阵$\boldsymbol{P}$满足式(7.36)。

证明 由于式(7.37)等价于

$$\boldsymbol{PA}_1\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} < \boldsymbol{I} \tag{7.38}$$

式(7.38)加式(7.36)可得

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + PA_1A_1^{\mathrm{T}}P + I < 0 \tag{7.39}$$

这相当于 $E = A_1, F = I$ 时，$X = P, \lambda = 1$ 满足 Riccati 不等式方程(7.31)，因此，根据定理 7.4，当式(7.37) 成立时，系统(7.26) 是时滞独立鲁棒稳定的。

7.2.2 鲁棒镇定

下面我们讨论对于给定的含有滞后状态的被控对象，如何利用上述鲁棒稳定性定理来设计使闭环系统时滞独立鲁棒稳定的状态反馈控制器，即时滞独立鲁棒镇定问题。

设含有滞后状态的被控对象由如下方程描述

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau) + Bu(t), \tau \geqslant 0 \tag{7.40}$$

其中 $u \in R^p$ 为控制输入、B 为适当维数的定常矩阵，将 A_1 分解为(7.30) 式。

对于上述被控对象，考虑设计状态反馈控制器

$$u(t) = K_0x(t) + K_\tau x(t-\tau) \tag{7.41}$$

使得闭环系统为时滞独立鲁棒稳定的问题。式(7.41) 中 K_0 和 K_τ 为适当维数的定常矩阵。当 $K_\tau = 0$ 时，式(7.41) 变为

$$u(t) = K_0x(t) \tag{7.42}$$

此时，由于控制律中与时间滞后量无关，因而称式(7.42) 为无记忆状态反馈控制器；对应地称式(7.41) 为有记忆状态反馈控制器。

将式(7.42) 代入系统(7.40)

$$\dot{x}(t) = (A + BK_0)x(t) + A_1x(t-\tau), \tau \geqslant 0 \tag{7.43}$$

根据引理 7.2，引理 7.3 和定理 7.4 可得如下结论。

定理 7.6 对于给定的被控系统(7.40)，存在无记忆状态控制器(7.42) 使得闭环系统是时滞独立鲁棒稳定的，如果下列三个

条件之一成立：

(1) 存在适当维数的定常矩阵 $\boldsymbol{K}_0$，使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_0$ 是渐近稳定的，且

$$\| \boldsymbol{F}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}_0)^{-1}\boldsymbol{E} \|_{\infty} < 1 \tag{7.44}$$

(2) 存在标量 $\lambda>0$，$\mu>0$ 和对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足下列 Riccati 不等式方程

$$\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\left(\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mu}\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} < 0 \tag{7.45}$$

(3) 存在标量 $\lambda>0$，$\mu>0$ 和 $\varepsilon>0$，使下列代数 Riccati 方程

$$\boldsymbol{XA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\left(\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mu}\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} + \varepsilon\boldsymbol{I} = 0 \tag{7.46}$$

则存在对称正定矩阵解 $\boldsymbol{X}$。

在这后两种情况下，无记忆状态控制器(7.42) 中

$$\boldsymbol{K}_0 = -\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \tag{7.47}$$

证明　将式(7.47) 代入式(7.45)，整理可得

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_0) + (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{XEE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} < 0 \tag{7.48}$$

由定理 7.4，当条件(2) 成立时，闭环系统(7.43) 是时滞独立鲁棒稳定的。根据引理 7.2 和引理 7.3，以及前面的证明，当条件(1) 和(3) 成立时，闭环系统(7.43) 也是时滞独立鲁棒稳定的。

将式(7.41) 代入系统(7.40)，我们有

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_0)\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{BK}_\tau)\boldsymbol{x}(t-\tau),\ \tau \geqslant 0 \tag{7.49}$$

取 $E = I, F = A_1 + BK_\tau$，由定理7.4和引理7.2，如果存在 K_0 和 K_τ 使得 $A + BK_0$ 是渐近稳定的，且

$$\|(A_1 + BK_\tau)(sI - A - BK_0)^{-1}\|_\infty < 1 \quad (7.50)$$

则闭环系统(7.49)是时滞独立鲁棒稳定的，即有记忆状态反馈控制器(7.40)可时滞独立鲁棒镇定系统(7.40)。如果令

$$K_0 = K, K_\tau = BK, L = BR \quad (7.51)$$

这里 $R \in R^{p \times p}$ 为任意可逆矩阵，则式(7.50)可化为

$$\|(A_1 + LK)(sI - A - BK)^{-1}\|_\infty < 1 \quad (7.52)$$

这样，只要能求得使式(7.52)成立的定常矩阵 K，那么就可得到系统(7.40)的有记忆状态反馈控制器(7.41)中的 K_0 和 K_τ。等价地，我们有如下结论。

定理7.7 对于给定的被控系统(7.40)，存在有记忆状态控制器(7.41)使得闭环系统是时滞独立鲁棒稳定的，如果下列两个条件之一成立：

(1) 存在对称正定矩阵 X 满足下列Riccati不等式方程

$$XA + A^TX + XX + A_1^TA_1 - (B^TX + L^TA_1)^T(L^TL)^{-1}(B^TX + L^TA_1) < 0 \quad (7.53)$$

(2) 存在标量 $\varepsilon > 0$，使下列代数Riccati方程

$$XA + A^TX + XX + A_1^TA_1 - (B^TX + L^TA_1)^T(L^TL)^{-1}(B^TX + L^TA_1) + \varepsilon I = 0 \quad (7.54)$$

存在对称正定矩阵解 X。

在这两种情况下，有记忆状态控制器(7.41)中

$$K_0 = -(R^TB^TBR)^{-1}(B^TX + R^TB^TA_1) \quad (7.55)$$

$$K_\tau = -(R^TB^TB)^{-1}(B^TX + R^TB^TA_1) \quad (7.56)$$

证明　利用式(7.55),(7.56)和(7.51),式(7.53)和(7.54)可分别化为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{XX}+\\&\qquad(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{LK})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{LK})<0\end{aligned} \tag{7.57}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{XX}+\\&\qquad(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{LK})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{LK})+\varepsilon\boldsymbol{I}=0\end{aligned} \tag{7.58}$$

这相当于取 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{I},\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{BK}_\tau,\lambda=1$ 时,式(7.31)和(7.29)成立,因此,由定理7.4和由引理7.3,当条件(1)和(2)成立时,闭环系统(7.49)是时滞独立鲁棒稳定的。

7.2.3 干扰抑制问题

设有干扰输入的被控对象描述如下

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t-\tau)+\\&\quad\boldsymbol{Bu}(t)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{w}(t),\tau\geqslant 0\end{aligned} \tag{7.59}$$

其中 $\boldsymbol{w}\in R^q$ 为干扰信号,$\boldsymbol{B}_1$ 为适当维数的定常矩阵,将 $\boldsymbol{A}_1$ 分解为(7.30)式。假设对于任意给定的 $T>t_0$,$\boldsymbol{w}(t)$ 满足如下有界条件:

$$\int_{t_0}^{T}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)\mathrm{d}t<+\infty \tag{7.60}$$

这个限制的物理意义为干扰信号的能量是有限的。定义干扰抑制性能的评价信号

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{Cx}(t)+\boldsymbol{Du}(t) \tag{7.61}$$

$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 为适当维数的定常矩阵。

对于上述被控对象,本节讨论如何设计无记忆状态反馈控制器

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{Kx}(t) \tag{7.62}$$

使其满足如下性能指标:

(P1) 当 $w(t) = 0$ 时,闭环系统具有时滞独立鲁棒稳定性。

(P2) 当初始状态为 $x(t) = \varphi(t) = 0(\forall t \in [t_0 - \tau, t_0])$ 时,对于任意给定的 $T > t_0$,

$$\int_{t_0}^{T} z^{\mathrm{T}}(t) z(t) \mathrm{d}t < \gamma \int_{t_0}^{T} w^{\mathrm{T}}(t) w(t) \mathrm{d}t \tag{7.63}$$

其中 $\gamma > 0$ 为给定的常数,表示干扰对评价信号的影响程度。

将式(7.62) 代入系统(7.59) 得闭环系统为

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + A_1 x(t - \tau) + B_1 w(t), \tau \geqslant 0 \tag{7.64}$$

为了简化数学推导,我们首先考虑在式(7.61) 中 $D = 0$ 的情形。

定理 7.8 对于给定的 $\gamma > 0$,如果存在标量 $\lambda > 0, \mu > 0$ 和对称正定矩阵 X 满足下列 Riccati 不等式方程

$$XA + A^{\mathrm{T}}X + X\left(\frac{1}{\lambda}EE^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\gamma}B_1 B_1^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mu}BB^{\mathrm{T}}\right)X + \lambda F^{\mathrm{T}}F + C^{\mathrm{T}}C < 0 \tag{7.65}$$

那么,存在无记忆状态控制器(7.62),使得闭环系统(7.59) 同时满足性能指标(P1) 和(P2)。并且,在这种情况下,

$$K = -\frac{1}{2\mu}B^{\mathrm{T}}X \tag{7.66}$$

证明 为了方便起见,令

$$A_K = A + BK = A - \frac{1}{2\mu}BB^{\mathrm{T}}X \tag{7.67}$$

这样,式(7.65) 被化为

$$XA_K + A_K^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\lambda}XEE^{\mathrm{T}}X + \lambda F^{\mathrm{T}}F +$$

$$\frac{1}{\gamma}XB_1B_1^{\mathrm{T}}X + C^{\mathrm{T}}C < 0 \tag{7.68}$$

当 $w(t) = 0$ 时,由此可得

$$XA_K + A_K^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\lambda}XEE^{\mathrm{T}}X + \lambda F^{\mathrm{T}}F < 0 \tag{7.69}$$

根据定理 7.4,闭环系统(7.64)是时滞独立鲁棒稳定的,即满足性能指标(P1)。

设 $\gamma > 0, \lambda > 0, \mu > 0$ 和 X 分别为满足式(7.65)的标量和对称正定矩阵,我们构造如下李亚普诺夫泛函

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}Xx + \lambda\int_{t-\tau}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)FF^{\mathrm{T}}x(s)\mathrm{d}s \tag{7.70}$$

并令初始条件

$$x(t) = \varphi(t) = 0, \forall t \in [t_0 - \tau, t_0] \tag{7.71}$$

考虑 $V(x)$ 沿系统(7.64)的解,对时间的求导数

$$\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}t} =$$

$$x^{\mathrm{T}}(t)(XA_K + A_K^{\mathrm{T}}X)x(t) -$$

$$\lambda x^{\mathrm{T}}(t-\tau)F^{\mathrm{T}}Fx(t-\tau) + \lambda x^{\mathrm{T}}(t)F^{\mathrm{T}}Fx(t) +$$

$$2x^{\mathrm{T}}(t)XA_1x(t-\tau) + 2x^{\mathrm{T}}(t)XB_1w(t) \tag{7.72}$$

对式(7.72)的最后两项,利用式(7.30)和引理 7.1

$$2x^{\mathrm{T}}(t)XA_1x(t-\tau) =$$

$$2x^{\mathrm{T}}(t)XEFx(t-\tau) \leqslant$$

$$\frac{1}{\lambda}x^{\mathrm{T}}(t)XEE^{\mathrm{T}}Xx(t) + \lambda x^{\mathrm{T}}(t-\tau)F^{\mathrm{T}}Fx(t-\tau) \tag{7.73}$$

$$2x^{\mathrm{T}}(t)XB_1w(t) \leqslant \frac{1}{\gamma}x^{\mathrm{T}}(t)XB_1B_1^{\mathrm{T}}Xx(t) + \gamma w^{\mathrm{T}}(t)w(t) \tag{7.74}$$

将式(7.73)和式(7.74)代入式(7.72),并利用(7.68)整理后有

$$\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}t} < -x^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}Cx(t) + \gamma w^{\mathrm{T}}(t)w(t) = -z^{\mathrm{T}}(t)z(t) + \gamma w^{\mathrm{T}}(t)w(t) \tag{7.75}$$

对上式两边从 t_0 到 T 积分,我们有

$$V(x(T)) - V(x(t_0)) < -\int_{t_0}^{T} z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t + \gamma\int_{t_0}^{T} w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\mathrm{d}t \tag{7.76}$$

考虑到 $V(x(T)) \geqslant 0$,并且在条件(7.71)下 $V(x(t_0)) = 0$,由式(7.36),

$$\int_{t_0}^{T} z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t < \gamma\int_{t_0}^{T} w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\mathrm{d}t$$

成立。因此,闭环系统满足性能指标(P2)。

其次,对于 $D \neq 0$ 的情形,假设 D 为列满秩的,参考定理7.7和定理7.8,我们不加证明地给出下列结论。

定理7.9 对于给定的 $\gamma > 0$,如果存在标量 $\lambda > 0$ 和对称正定矩阵 X 满足下列Riccati不等式方程

$$XA + A^{\mathrm{T}}X + X\left(\frac{1}{\lambda}EE^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\gamma}B_1B_1^{\mathrm{T}}\right)X + \lambda F^{\mathrm{T}}F + C^{\mathrm{T}}C - (B^{\mathrm{T}}X + D^{\mathrm{T}}C)^{\mathrm{T}}(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}(B^{\mathrm{T}}X + D^{\mathrm{T}}C) < 0 \tag{7.77}$$

那么,存在无记忆状态控制器(7.62),使得闭环系统(7.46)同时满足性能指标(P1)和(P2)。并且,在这种情况下

$$K = -(D^TD)^{-1}(B^TX + D^TC) \tag{7.78}$$

7.3 非线性时滞系统的鲁棒控制

严格地说，实际工程中的被控对象往往都具有非线性特征。在设计系统时，一般都采用被控对象的近似线性化模型。因此，实际的被控对象模型应为在线性模型的基础上，再加上非线性的模型误差。

7.3.1 鲁棒稳定性分析

考虑由如下方程描述的非线性时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau) + f(x(t), x(t-\tau), t), \tau \geqslant 0 \tag{7.79}$$

其中 $x \in R^n$ 为状态变量，$A, A_1 \in R^{n\times n}$ 为定常矩阵，$f(x(t), x(t-\tau), t)$ 为 n 维向量函数，$\tau \geqslant 0$ 为时间滞后量。假设 $f(x(t), x(t-\tau), t)$ 可以描述为

$$f(x(t), x(t-\tau), t) = E_\delta \delta(x(t), x(t-\tau), t) \tag{7.80}$$

$E_\delta \in R^{n\times m}$ 为已知的定常矩阵，$\delta(x(t), x(t-\tau), t) \in R^m$ 未知的连续可微向量函数，并假设 $\delta(x,(t), x(t-\tau), t)$ 满足

$$\| \delta(x(t), x(t-\tau), t) \|^2 \leqslant \| F_\delta x(t) \|^2 + \| F_{\delta\tau} x(t-\tau) \|^2 \tag{7.81}$$

F_δ 和 $F_{\delta\tau}$ 为定常的加权矩阵。

同上一节，我们总可以将系统(7.79)中的定常矩阵 A_1 分解为两个适当维数的矩阵之积，即存在两个适当维数的矩阵 E_1 和 F_1，使

$$A_1 = E_1F_1 \tag{7.82}$$

并令

$$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{E}_1\ \boldsymbol{E}_\delta],\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{F}_\delta^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{F}_{\delta\tau}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{7.83}$$

容易看出，$\boldsymbol{E}$ 为具有 n 行的定常矩阵，而 $\boldsymbol{F}$ 为具有 n 列的定常矩阵。

定理 7.10　设 $\delta(0,0,t)=0,\forall t$，即 $\boldsymbol{x}=0$ 是系统(7.79)的一个平衡点，如果存在适当的标量 $\lambda>0$ 和对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足下列 Riccati 不等式方程

$$\boldsymbol{XA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{XEE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} < 0 \tag{7.84}$$

那么系统(7.79)是时滞独立鲁棒稳定的。

证明　设 λ 和 $\boldsymbol{X}$ 分别为满足式(7.84)的标量和对称正定矩阵，我们构造如下李亚普诺夫泛函

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Xx} + \lambda\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)(\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_{\delta\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\delta\tau})\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s \tag{7.85}$$

并令

$$Q = -\left(\boldsymbol{XA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{XEE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\right) > 0 \tag{7.86}$$

将式(7.85)沿系统(7.79)的解，对时间的求导数可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} = {} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{XA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\boldsymbol{x}(t) + \\ & \lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_{\delta\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\delta\tau})\boldsymbol{x}(t) - \\ & \lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)(\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_{\delta\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\delta\tau})\boldsymbol{x}(t-\tau) + \\ & 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{XA}_1\boldsymbol{x}(t-\tau) + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Xf}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau),t)\end{aligned} \tag{7.87}$$

对式(7.87) 的最后两项，利用引理 7.1 并考虑到式(7.80) ~ (7.82)

$$2x^{\mathrm{T}}(t)XA_1x(t-\tau)=2x^{\mathrm{T}}(t)XE_1F_1x(t-\tau)\leqslant$$

$$\frac{1}{\lambda}x^{\mathrm{T}}(t)XE_1E_1^{\mathrm{T}}Xx(t)+\lambda x^{\mathrm{T}}(t-\tau)E_1^{\mathrm{T}}E_1x(t-\tau) \tag{7.88}$$

$$\begin{aligned}&2x^{\mathrm{T}}(t)Xf(x(t),x(t-\tau),t)=\\&2x^{\mathrm{T}}(t)XE_\delta\delta(x(t),x(t-\tau),t)\leqslant\\&\frac{1}{\lambda}x^{\mathrm{T}}(t)XE_\delta E_\delta^{\mathrm{T}}Xx(t)+\lambda\|\delta(x(t),x(t-\tau),t)\|^2\leqslant\\&\frac{1}{\lambda}x^{\mathrm{T}}(t)XE_\delta E_\delta^{\mathrm{T}}Xx(t)+\lambda[x^{\mathrm{T}}(t)F_\delta^{\mathrm{T}}F_\delta x(t)+\\&x^{\mathrm{T}}(t-\tau)F_{\delta\tau}^{\mathrm{T}}F_{\delta\tau}x(t-\tau)]\end{aligned} \tag{7.89}$$

将式(7.88) 和式(7.89) 代入式(7.87)，并利用式(7.83) 和式(7.86) 进行整理，可得

$$\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}t}\leqslant-x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)$$

根据稳定性定理 7.2，非线性系统(7.79) 是时滞独立鲁棒稳定的。

注记7.5 尽管 E 的列数和 F 的行数可能均大于 n，但是由于 E 的行数和 F 的列数均为 n，因此 EE^{T} 和 $F^{\mathrm{T}}F$ 均为 n 阶矩阵，所以，实际上对式(7.84) 的判断并没有增加什么困难。

注记7.6 由引理7.5和引理7.6，定理7.10中条件的判断可通过解一个如下的代数 Riccati 方程

$$XA+A^{\mathrm{T}}X+\frac{1}{\lambda}XE_0E_0^{\mathrm{T}}X+\lambda F_0^{\mathrm{T}}F_0+\varepsilon I=0 \tag{7.90}$$

或者判断一个如下传递函数

$$G(s) + F_0(sI - A)^{-1}E_0 \tag{7.91}$$

的 H_∞ 范数是否小于 1。而这两种判断方法在 Matlab 工具箱中有标准的软件，因此，该方法使用起来比较方便。需要说明的是在式(7.90) 和式(7.91) 中，E_0 和 F_0 并不一定是式(7.83) 的 E 和 F，只须满足下式即可。

$$EE^{\mathrm{T}} = E_0E_0^{\mathrm{T}}, F^{\mathrm{T}}F = F_0^{\mathrm{T}}F_0 \tag{7.92}$$

一般地，如果选择满足式(7.92) 的 E_0 为列满秩的，F_0 为行满秩的，则所得到结论的保守性较小。

7.3.2 鲁棒镇定

考虑如下的含有时间滞后的非线性被控对象

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau) + f(x(t), x(t-\tau), t) + Bu(t), \tau \geqslant 0 \tag{7.93}$$

其中 $u \in R^p$ 为控制输入变量，B 为适当维数的定常矩阵，$\tau \geqslant 0$ 为时间滞后量。假设非线性项 $f(x(t), x(t-\tau), t)$ 可以描述为式(7.80) ~ 式(7.82)。

对于被控对象 (7.93)，现在考虑无记忆线性状态反馈控制器

$$u(t) = Kx(t) \tag{7.94}$$

使得由式(7.93) 和式(7.94) 构成的闭环系统

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + A_1x(t-\tau) + f(x(t), x(t-\tau), t) \tag{7.95}$$

对于任意的时间滞后量 $\tau \geqslant 0$ 是渐近稳定的，即滞后独立鲁棒稳定的。

定理 7.11 对于给定的被控对象(7.93)，如果存在标量 $\lambda > 0, \mu > 0$ 和对称正定矩阵 X 满足下列 Riccati 不等式方程

$$XA + A^{\mathrm{T}}X + X\left(\frac{1}{\lambda}EE^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mu}BB^{\mathrm{T}}\right)X + \lambda F^{\mathrm{T}}F < 0 \quad (7.96)$$

那么,存在无记忆线性状态反馈控制器(7.94),可时滞独立鲁棒镇定闭环系统(7.95)。并且,在这种情况下

$$K = -\frac{1}{2\mu}B^{\mathrm{T}}X \quad (7.97)$$

这里 E,F 如式(7.83) 所定义。

证明　为了方便起见,令

$$A_K = A + BK = A - \frac{1}{2\mu}BB^{\mathrm{T}}X \quad (7.98)$$

这样,式(7.96) 被化为

$$XA_K + A_K^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\lambda}XEE^{\mathrm{T}}X + \lambda F^{\mathrm{T}}F < 0 \quad (7.99)$$

根据定理 7.10,闭环系统(7.95) 是时滞独立鲁棒稳定的,即被控对象 (7.93) 可由无记忆线性状态反馈控制器(7.94) 实现镇定。

7.3.3　鲁棒观测器的设计

考虑如下的含有时间滞后的非线性被控对象

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) = {} & Ax(t) + f(x(t), x(t-\tau), u(t), t) + \\ & g_2(u(t), y(t), t) + g_1(x(t), x(t-\tau), \\ & t)w(t), \tau \geqslant 0 \\ y(t) = {} & Cx(t) \end{aligned}\right\} \quad (7.100)$$

其中,$w(t) \in R^q$ 为干扰信号,$y(t) \in R^m$ 为观测量, A 和 C 为适当维数的定常矩阵,$f(x(t), x(t-\tau), u(t), t)$ 和 $g_2(u(t), y(t), t)$ 均为 n 维向量函数, $g_1(x(t), x(t-\tau), t)$ 为未知的具有适当维数的函数矩阵。

对于系统(7.100),考虑具有如下结构的状态观测器:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + f(\hat{x}(t), \hat{x}(t-\tau), u(t), t) +$$

$$g_2(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{y}(t),t)+L(\hat{\boldsymbol{y}}(t)-\boldsymbol{y}(t)) \tag{7.101}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{y}}(t)=\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t) \tag{7.102}$$

$\boldsymbol{L}$ 是待设计的观测器增益矩阵。

定义状态观测误差为

$$\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t) \tag{7.103}$$

由式(7.100)～式(7.103)可求得误差满足如下的动态方程

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})\boldsymbol{e}(t)+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau),\\ \boldsymbol{u}(t),t)-\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(t),\hat{\boldsymbol{x}}(t-\tau),\boldsymbol{u}(t),t)+\\ \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau),t)\end{aligned} \tag{7.104}$$

本节的目的是设计状态观测器增益矩阵 $\boldsymbol{L}$，使得具有结构(7.101)的观测器满足如下两个性能指标。

(P1) 当 $\boldsymbol{w}(t)=0$ 时，误差方程(7.104)的平衡点 $\boldsymbol{e}(t)=0$ 是时滞独立鲁棒稳定的，此时有 $\lim\limits_{t\to+\infty}(\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t))=0$。

(P2) 当初始状态偏差为 $\boldsymbol{e}(t)=0(\forall t\in[t_0-\tau,t_0])$ 时，对于任意给定的 $T>t_0$

$$\|Me\|_T<\gamma\|w\|_T \tag{7.105}$$

其中 $\gamma>0$ 为给定的常数，表示干扰对误差信号的影响程度，M 为加权矩阵，对于向量 $w(t)$，$\|w\|_T=\left\{\int_{t_0}^{t}w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}}$。

假设系统(7.100)满足以下条件：

(H1) 对于任意的 $\boldsymbol{u}$ 和 t，非线性函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},(t),\boldsymbol{x}(t-\tau),\boldsymbol{u}(t),t)$ 满足

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau),\boldsymbol{u}(t),t)-\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(t),\hat{\boldsymbol{x}}(t-\tau),\boldsymbol{u}(t),t)=\\ \boldsymbol{E}\Delta(\boldsymbol{x}(t),\hat{\boldsymbol{x}}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau),\hat{\boldsymbol{x}}(t-\tau),\boldsymbol{u}(t),t)\end{aligned} \tag{7.106}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为定常矩阵，函数 $\Delta(\boldsymbol{x}(t),\hat{\boldsymbol{x}}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau),\hat{\boldsymbol{x}}(t-\tau),\boldsymbol{u}(t),t)$ 满足

$$\|\Delta(\boldsymbol{x}(t),\hat{\boldsymbol{x}}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau),\hat{\boldsymbol{x}}(t-\tau),\boldsymbol{u}(t),t)\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{F}_{\delta}\boldsymbol{e}(t)\|^2 + \|\boldsymbol{F}_{\delta\tau}\boldsymbol{e}(t-\tau)\|^2 \tag{7.107}$$

这里 $\boldsymbol{F}_{\delta}$ 和 $\boldsymbol{F}_{\delta\tau}$ 为定常矩阵。为了符号简单，我们令

$$\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{F}_{\delta}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{F}_{\delta\tau}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{7.108}$$

(H2) 存在定常矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使下式成立

$$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau),t)\boldsymbol{g}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau),t) \leqslant \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \tag{7.109}$$

该假设表明系统(7.100)中干扰输入增益一致有界。

下面我们证明满足性能指标(P1)和(P2)的观测器增益的设计，可以通过求解一个代数 Riccati(不等式)方程得到。为了叙述简便，不妨令 $\gamma - 1$。

定理7.12 如果存在标量 $\lambda > 0, \mu > 0$ 和对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足下列 Riccati 不等式方程

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} + \mu\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{X}\left(\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} - \frac{1}{\mu}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{X} < 0 \tag{7.110}$$

则同时满足性能指标(P1)和(P2)的观测器增益为

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{X}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \tag{7.111}$$

证明 为了方便起见，令

$$\boldsymbol{A}_L = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{X}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \tag{7.112}$$

这样，式(7.68)被化为

$$XA_L^{\mathrm{T}} + A_LX + \lambda EE^{\mathrm{T}} + \mu BB^{\mathrm{T}} +$$

$$X\left(\frac{1}{\lambda}F^{\mathrm{T}}F + \frac{1}{\mu}M^{\mathrm{T}}M\right)X < 0 \tag{7.113}$$

令 $Y = X^{-1}$,则 Y 为对称正定矩阵,且由上式

$$A_L^{\mathrm{T}}Y + YA_L + Y(\lambda EE^{\mathrm{T}} + \mu BB^{\mathrm{T}})Y +$$

$$\frac{1}{\lambda}F^{\mathrm{T}}F + \frac{1}{\mu}M^{\mathrm{T}}M < 0 \tag{7.114}$$

定义二次李亚普诺夫泛函

$$V(e) = e^{\mathrm{T}}(t)Ye(t) + \frac{1}{\lambda}\int_{t-\tau}^{t} e^{\mathrm{T}}(s)F_{\delta\tau}^{\mathrm{T}}F_{\delta\tau}e(s)\mathrm{d}s \tag{7.115}$$

令 $w(t) = 0$, 考虑 $V(e)$ 沿误差方程(7.104)的解,对时间的求导数,并利用假设(H1)

$$\frac{\mathrm{d}V(e)}{\mathrm{d}t} = e^{\mathrm{T}}(t)(YA_L + A_L^{\mathrm{T}}Y)e(t) -$$

$$\frac{1}{\lambda}e^{\mathrm{T}}(t-\tau)F_{\delta\tau}^{\mathrm{T}}F_{\delta\tau}e(t-\tau) +$$

$$\frac{1}{\lambda}e^{\mathrm{T}}(t)F_{\delta\tau}^{\mathrm{T}}F_{\delta\tau}e(t) + 2e^{\mathrm{T}}(t)YE\Delta \tag{7.116}$$

对式(7.116) 的最后一项,利用式(7.107) 和引理 7.1

$$2e^{\mathrm{T}}(t)YE\Delta \leqslant \lambda e^{\mathrm{T}}(t)YEE^{\mathrm{T}}Ye(t) + \frac{1}{\lambda}\|\Lambda\|^2 \leqslant$$

$$\lambda e^{\mathrm{T}}(t)YEE^{\mathrm{T}}Ye(t) + \frac{1}{\lambda}[e^{\mathrm{T}}(t)F_{\delta}^{\mathrm{T}}F_{\delta}e(t) +$$

$$e^{\mathrm{T}}(t-\tau)]F_{\delta\tau}^{\mathrm{T}}F_{\delta\tau}e(t-\tau)] \tag{7.117}$$

将式(7.117) 代入(7.116) 并利用式(7.114) 和式(7.108)

$$\frac{\mathrm{d}V(e)}{\mathrm{d}t} \leqslant e^{\mathrm{T}}(t)(YA_L + A_L^{\mathrm{T}}Y + \lambda YEE^{\mathrm{T}}Y + \frac{1}{\lambda}F^{\mathrm{T}}F)e(t) \leqslant$$

$$- e^{\mathrm{T}}(t)(Q + \mu \boldsymbol{YBB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M})e(t) \qquad (7.118)$$

这里

$$Q = -\left(\boldsymbol{YA}_L + \boldsymbol{A}_L^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} + \lambda \boldsymbol{YEE}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\right) > 0$$

根据定理 7.5,当 $w(t) = 0$ 时,误差方程(7.104)是时滞独立鲁棒稳定的,即性能指标(P1)被满足。

下面证明性能指标(P2)成立。对于任意给定的能量有限的干扰 $w(t)$,令误差方程(7.104)的初始条件为 $e(t) = 0(\forall t \in [t_0 - \tau, t_0])$,考虑 $V(e)$ 沿误差方程(7.104)满足该初始的解,对时间的求导数,并利用假设(H1)和(H2),经过与前面类似的推导可得

$$\frac{\mathrm{d}V(e)}{\mathrm{d}t} < -\mu e^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{YBB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}e(t) - \frac{1}{\mu}e^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}e(t) + 2e^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Y}g_1 w(t) \qquad (7.119)$$

对式(7.119)的最后一项,利用引理 7.1 和假设(H2)

$$2e^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Y}g_1 w(t) \leqslant \mu e^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{YBB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}e(t) + \frac{1}{\mu}w^{\mathrm{T}}(t)w(t) \qquad (7.120)$$

将式(7.80)代入式(7.119)有

$$\frac{\mathrm{d}V(e)}{\mathrm{d}t} < \frac{1}{\mu}[w^{\mathrm{T}}(t)w(t) - e^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}x(t)] \qquad (7.121)$$

对上式两边从 t_0 到 T 积分,考虑到 $V(e(T)) \geqslant 0$,并且在给定初始条件下 $V(e,(t_0)) = 0$,显然有

$$\int_{t_0}^{T} e^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}e(t)\mathrm{d}t < \int_{t_0}^{T} w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\mathrm{d}t$$

成立。因此,闭环系统满足性能指标(P2)。

7.4 多时滞系统鲁棒控制的有关结果

在本节我们将不加证明地给出多时滞系统时滞独立鲁棒稳定性和鲁棒镇定的有关结果。参考本章前几节的有关概念和结论很容易证明本节的结论。

7.4.1 多时滞线性系统鲁棒控制

考虑如下方程描述的多时滞线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t - \tau_i), \tau_i \geqslant 0 \qquad (7.122)$$

其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_i \in R^{n \times n}$ 为定常矩阵，$\tau_i \geqslant 0$ 为时间滞后量。

我们总可以将系统(7.122)中的定常矩阵 $\boldsymbol{A}_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 分别分解为两个适当维数的矩阵之积，即存在适当维数的矩阵 $\boldsymbol{E}_i$ 和 $\boldsymbol{F}_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 使

$$\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{E}_i\boldsymbol{F}_i, \qquad (i = 1,2,\cdots,m) \qquad (7.123)$$

并且令

$$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{E}_1 \quad \boldsymbol{E}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{E}_m], \boldsymbol{F} = [\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{F}_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \qquad (7.124)$$

将定理 7.4 推广到多时滞线性系统可得如下结论。

定理 7.13 如果存在适当的标量 $\lambda > 0$ 和对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足下列 Riccati 不等式方程

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} < 0 \qquad (7.125)$$

或者等价地，$\boldsymbol{A}$ 是渐近稳定的，且

$$\| \boldsymbol{F}_0(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{E}_0 \| < 1 \qquad (7.126)$$

那么系统(7.122)是时滞独立鲁棒稳定的。这里 E_0 和 F_0 须满足

$$EE^{\mathrm{T}} = E_0E_0^{\mathrm{T}}, F^{\mathrm{T}}F = F_0^{\mathrm{T}}F_0 \tag{7.127}$$

的适当维数的任意矩阵。

从式(7.124)可以看出，E 的列数和 F 的行数可能均大于 n，但是由于 E 的行数和 F 的列数均为 n，这样 EE^{T} 和 $F^{\mathrm{T}}F$ 均为 n 阶矩阵。若式(7.127)成立，则 Riccati 不等式方程(7.125)等价于

$$XA + A^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\lambda}XE_0E_0^{\mathrm{T}}X + \lambda E_0^{\mathrm{T}}F_0 < 0$$

因此为寻找满足(7.125)的标量 $\lambda > 0$ 和对称正定矩阵 X，解代数 Riccati 方程

$$XA + A^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\lambda}XE_0E_0^{\mathrm{T}}X + \lambda F_0^{\mathrm{T}}F_0 + \epsilon I = 0 \tag{7.128}$$

时，并没有增加多少计算量。一般地，如果选择满足式(7.127)的 E_0 为列满秩的，F_0 为行满秩的，则所得到结论的保守性较小。

下面讨论对于给定的含有多时滞的被控对象，如何利用上述定理设计使闭环系统时滞独立鲁棒稳定的状态反馈控制器。设含有多时滞的被控对象由如下方程描述

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - \tau_i) + Bu(t), \tau_i \geqslant 0 \tag{7.129}$$

其中 $u \in R^p$ 为控制输入变量，B 为适当维数的定常矩阵。

对于上述被控对象，考虑设计无记忆线性状态反馈控制器

$$u(t) = Kx(t) \tag{7.130}$$

使得由式(7.129)和式(7.130)构成的闭环系统

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - \tau) \tag{7.131}$$

对于任意的时间滞后量 $\tau_i \geqslant 0$ 是渐近稳定的，即时滞独立鲁棒稳

定的。

定理 7.14 对于给定的被控对象 (7.129),如果存在标量 $\lambda > 0$, $\mu > 0$ 和对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足下列 Riccati 不等式方程

$$\boldsymbol{XA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\left(\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mu}\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} < 0 \tag{7.132}$$

那么,存在无记忆线性状态控制器(7.130),可时滞独立鲁棒镇定系统(7.129)。并且,在这种情况下

$$\boldsymbol{K} = -\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \tag{7.133}$$

如果在系统(7.129) 中 $\boldsymbol{A}_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 满足如下所谓的匹配条件

$$\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{BF}_i, \qquad (i = 1,2,\cdots,m) \tag{7.134}$$

则可通过解李亚普诺夫不等式方程,获得使系统(7.129) 时滞独立鲁棒镇定的控制器(7.127)。

定理 7.15 对于给定的被控对象 (7.129),如果满足匹配条件(7.134),则存在无记忆线性状态控制器(7.130),可使闭环系统(7.131) 时滞独立鲁棒稳定的充分条件是 $\boldsymbol{A}$ 为渐近稳定的。并且,在这种情况下

$$\boldsymbol{K} = -\frac{m}{2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \tag{7.135}$$

这里,对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足下列李亚普诺夫不等式方程

$$\boldsymbol{XA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} < 0 \tag{7.136}$$

证明 由于 $\boldsymbol{A}$ 是渐近稳定的,且 $\boldsymbol{A}_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 满足匹配条件(7.134),则 $\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}} = m\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}$。令 $\lambda = 1, \mu = 1/m$,那么式(7.89) 等价于式(7.136)。由定理 7.15,该定理成立。

为了验证和说明前面的稳定性以及鲁棒控制器设计的有关结论,我们考虑如下的两个例子。

例 7.1　考虑如下线性时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau_1) + A_2x(t-\tau_2) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \varepsilon_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.25 & -0.3 \end{bmatrix} x(t-\tau_1) +$$

$$\varepsilon_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.25 & 0.6 \end{bmatrix} x(t-\tau_2) \tag{7.137}$$

令 $A_1 = E_1F_1$ 和 $A_2 = E_2F_2$，这里

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = [0.25 \quad -0.3], F_2 = [-0.25 \quad 0.6] \tag{7.138}$$

则

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.3 \\ -0.25 & 0.6 \end{bmatrix} \tag{7.139}$$

计算可得

$$\| F(sI - A)E_0 \|_\infty = \sqrt{0.125(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)} \tag{7.140}$$

这里，$E_0 = [0 \quad \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}]^{\mathrm{T}}$。因此由定理 7.14，当$\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} < 8$ 时系统(7.138)是时滞独立鲁棒稳定的。若在系统(7.138)中令 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$，则当 $|\varepsilon| < 2$ 时，系统(7.138)是时滞独立鲁棒稳定的，这个结果比已有的一些文献[3,4]保守性较小。

例 7.2　考虑如下多时滞线性系统[5]，对应于式(7.129)中有 $n = 4$, $m = 3$, $p = 3$，并且

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.005 & 0.25 & 0 \\ 0.005 & 0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.005 & 0.0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0005 \\ -1 & -0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.0375 & 0 & 0.075 & 0.125 \\ 0 & 0.05 & 0.05 & 0 \\ 0.05 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

J. Chen 等在文献[5]中表明该系统在不施加控制时不是时滞独立鲁棒稳定。而现有单时滞系统的鲁棒镇定方法不能使用。利用本节的定理 7.14,我们取

$$E_1 = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0.005 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0.005 & 0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0.075 & 0 & 0.15 & 0.125 \\ 0 & 0.05 & 0.1 & 0 \\ 0.01 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 05 & 1 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

令 $\lambda = 0.01$ 和 $\varepsilon = 1$,解 Riccati 不等式方程(7.132),可得线性反

馈控制规律(7.133)如下：

$$K=\begin{bmatrix} 9.6535 & 2.3794 & 0.3033 & -1.3912 \\ -1.9665 & 6.9533 & 0.4431 & -1.1910 \\ 0.0659 & 1.1077 & 6.4587 & -3.2899 \end{bmatrix}$$

7.4.2 多时滞非线性系统的鲁棒控制

考虑由如下方程描述的非线性时滞系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau_1),\cdots,\boldsymbol{x}(t-\tau_m),t),\tau_i\geqslant 0 \tag{7.141}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 为状态变量，$\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$ 为定常矩阵，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}、t-\tau_1),\cdots,\boldsymbol{x}(t-\tau_m),t)$ 为 n 维向量函数，$\tau_i\geqslant 0(i=1,\cdots,m)$ 为时间滞后量。假设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau_1),\cdots,\boldsymbol{x}(t-\tau_m),t)$ 可以描述为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau_1),\cdots,\boldsymbol{x}(t-\tau_m),t)=\boldsymbol{E}\delta(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau_1),\cdots,\boldsymbol{x}(t-\tau_m),t) \tag{7.142}$$

$\boldsymbol{E}\in R^{n\times l}$ 为已知的定常矩阵，$\delta(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau_1),\cdots,\boldsymbol{x}(t-\tau_m),t)\in R^l$ 未知的连续可微向量函数，并假设 $\delta(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau_1),\cdots,\boldsymbol{x}(t-\tau_m),t)$ 满足

$$\|\delta(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau_1),\cdots,\boldsymbol{x}(t-\tau_m),t)\|^2\leqslant\sum_{i=0}^{m}\|\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{x}(t-\tau_i)\|^2 \tag{7.143}$$

这里，$\tau_0=0$，$\boldsymbol{F}_i(i=0,1,\cdots,m)$ 为定常的加权矩阵。令

$$\boldsymbol{F}=[\boldsymbol{F}_0^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}\quad\cdots\quad \boldsymbol{F}_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{7.144}$$

容易看出，$\boldsymbol{F}$ 为具有 n 列的定常矩阵。

定理 7.16 设 $\boldsymbol{x}=0$ 是系统(7.141)的一个平衡点，如果存在适当的标量 $\lambda>0$ 和对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足下列 Riccati 不等式方程

$$XA = A^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\lambda}XEE^{\mathrm{T}}X + \lambda F^{\mathrm{T}}F < 0 \qquad (7.145)$$

那么系统(7.141)是时滞独立鲁棒稳定的。

考虑如下的含有多时间滞后的非线性被控对象

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t), x(t-\tau_1), \cdots, \\ x(t-\tau_m), t) + Bu(t), \tau \geqslant 0 \qquad (7.146)\end{aligned}$$

其中 $u \in R^p$ 为控制输入变量，B 为适当维数的定常矩阵，假设非线性项 $f(x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m), t)$ 可以描述为式(7.142) ~ 式(7.144)。

对于被控对象 (7.146)，设计无记忆线性状态反馈器

$$u(t) = Kx(t) \qquad (7.147)$$

使得由式(7.146)和式(7.147)构成的闭环系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + \\ f(x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m), t) \qquad (7.148)\end{aligned}$$

对于任意的时间滞后量 $\tau_i \geqslant 0$ 是渐近稳定的，即滞后独立鲁棒稳定的。

定理 7.17 对于给定的被控对象 (7.146)，如果存在标量 $\lambda > 0, \mu > 0$ 和对称正定矩阵 X 满足下列 Riccati 不等式方程

$$XA + A^{\mathrm{T}}X + X\left(\frac{1}{\lambda}EE^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mu}BB^{\mathrm{T}}\right)X + \lambda F^{\mathrm{T}}F < 0 \qquad (7.149)$$

那么，存在无记忆线性状态控制器(7.147)，可时滞独立鲁棒镇定系统(7.148)。并且，在这种情况下

$$K = -\frac{1}{2\mu}B^{\mathrm{T}}X \qquad (7.150)$$

如果在系统(7.146)中匹配条件成立，即在式(7.142)中，$B = E$，则有如下结论。

定理 7.18 对于给定满足匹配条件的被控对象(7.147),存在无记忆线性状态控制器(7.148),可使闭环系统(7.149)时滞独立鲁棒稳定的充分条件为 $\boldsymbol{A}$ 是渐近稳定的。并且,在这种情况下

$$\boldsymbol{K} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \tag{7.151}$$

这里,对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足下列李亚普诺夫不等式方程(7.136)。

7.5 应　　用

飞机运动系统是一个复杂的包含时滞的非线性系统,在作了各种工程容许的假设之后,可根据不同的飞行高度和马赫数,在标称状态附近线性化。实际上,即使对飞机运动系统作了线性化近似,该系统也应该是一个线性时滞系统。现在一般地,将洗流时差(下洗时延)引起的附加纵向力矩近似为迎角导数($\dot{\alpha}$)的函数,而实际上这项附加力矩应是($\alpha(t)-\alpha(t-\tau)$)的函数,这里 τ 是下洗时延,而这里

$$\dot{\alpha} \approx \frac{\alpha(t)-\alpha(t-\tau)}{\tau} \tag{7.152}$$

我们知道下洗时延 τ 的大小主要与飞机的机身长度和飞机在当时的速度有关,因此上式的近似程度也就取决于这两个量。当机身较长而速度较小(特别是对于一般的亚音速飞机)时,下洗时延 τ 比较大这样的近似误差也就增大;如果不作这样的近似,那么飞机运动系统应是时滞控制系统。另一方面,在大迎角飞行状态下,飞机运动系统也是时滞控制系统。

由于大气紊流对飞机运动系统的影响与一般的随机干扰没有什么差别,因此在大气紊流的干扰下含有时滞的飞机纵向运动系统的数学模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-\tau) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{w}(t) \tag{7.153}$$

其中 $x=[v_0 \quad \alpha \quad \vartheta \quad \omega_z]^{\mathrm{T}}$ 为飞行状态变量,而 v_0 为空气流速, α 为气流迎角, ϑ 为俯仰角, ω_z 为俯仰角速度; $\boldsymbol{u}=[\delta_p \quad \delta_e]$ 为控制变量,而 δ_p 油门开度, δ_e 为升降舵偏角; w 为外部干扰, $\tau \geqslant 0$ 为时间滞后量; $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_d, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}_1$ 均为适当维数的常数矩阵,各元素由具体飞机的气动导数决定。

例 7.1　设在大气紊流干扰的情况下,国产某型飞机纵向运动系统的模型为(7.152),其中的常数矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -0.08 & -0.03 & -0.157 & 0 \\ -0.73 & -0.377 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8.65 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1.54 & -0.02 \\ -0.1 & -0.056 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_d=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

假设对于任意给定的 $T>t_0$,大气紊流干扰 $w(t)$ 满足如下有界条件:

$$\int_{t_0}^{T} w^{\mathrm{T}}(t) w(t) \mathrm{d} t<+\infty \tag{7.154}$$

即干扰信号的能量是有限的。

对于上述飞机运动系统,本节讨论如何设计无记忆状态反馈控制器

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K} \boldsymbol{x}(t) \tag{7.155}$$

使其满足如下性能指标：

(P1) 当 $w(t)=0$ 时，闭环系统具有时滞独立鲁棒稳定性。

(P2) 当初始状态为 $x(t)=\varphi(t)=0, \forall t \leqslant t_0$ 时，对于任意给定的 $T>t_0$

$$\int_{t_0}^{T} x^{\mathrm{T}}(t) S x(t) \mathrm{d}t < \gamma \int_{t_0}^{T} w^{\mathrm{T}}(t) w(t) \mathrm{d}t \tag{7.156}$$

其中 S 为半正定的对称加权矩阵，$\gamma>0$ 为给定的常数，表示干扰对评价信号的影响程度。在这里我们取 $\gamma=0.01$。

为了研究干扰对短周期状态（即迎角 α 和俯仰角速度 ω_z）的影响，我们取如下加权矩阵

$$S=\mathrm{diag}[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0.25]$$

因此我们可以取评价信号为

$$z(t)=Cx(t) \tag{7.157}$$

而这里矩阵 C 为

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{7.158}$$

对该问题，利用定理7.8，令 $\mu=0.001, \lambda=1.0$，并将上面的有关数据代入方程(7.65)，可解得正定矩阵

$$X=\begin{bmatrix} 0.0018 & -0.0109 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0109 & 0.2373 & -0.0003 & 0.0002 \\ 0.0000 & -0.0003 & 0.0024 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0024 \end{bmatrix}$$

可得反馈矩阵

$$K=-\frac{1}{2\mu}B^{\mathrm{T}}X=\begin{bmatrix} -0.1953 & 2.0253 & -0.0002 & 0.0017 \\ -0.0326 & 0.7040 & 0.0074 & 0.7958 \end{bmatrix}$$

第 8 章　区间系统的鲁棒控制

本章我们将重点研究区间系统的鲁棒稳定性分析和鲁棒控制的有关问题。可以说,区间系统是含有参数不确定性的系统中最难研究的一种,这是因为对于一个 n 阶区间系统,在状态矩阵中就有 n^2 个不确定参数。尽管如此,近年来关于区间系统的研究还是取得了许多结果。从已有的文献来看,区间系统的研究绝大部分仅限于鲁棒稳定性分析,关于区间系统鲁棒控制器的设计问题研究得很少。在本章中,我们首先将区间系统转换为一类范数有界的结构不确定性系统。在此的基础上,给出一系列检验定常区间系统鲁棒稳定性的判据,并利用 H_∞ 控制理论,来研究区间系统的鲁棒镇定和干扰抑制问题。在本章我们还研究了时滞区间系统的鲁棒稳定性、鲁棒镇定和干扰抑制问题,并将有关的结果推广到时变区间系统的情形。最后研究了飞机运动系统区间模型及鲁棒飞行控制问题。

8.1　区间系统的描述与转换

考虑下述方程描述的线性动态系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \tag{8.1}$$

这里,$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ 为状态向量,$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为系统矩阵。$\boldsymbol{A}$ 中的元素不能完全确定,但是,它们属于某些确定的区间,因此将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为区间矩阵;系统(8.1)称为区间系统。

令　$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}, \boldsymbol{P} = (p_{ij})_{n\times n}, \boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{n\times n}$
表示定常的 $n \times n$ 实矩阵,括号中的符号表示该矩阵的第(i,j)个

位置的元素。符号 $P \leqslant A \leqslant Q$ 表示

$$p_{ij} \leqslant a_{ij} \leqslant q_{ij}, i, j = 1,2,\cdots,n$$

对于给定的矩阵 P,Q,用 $N[P,Q]$ 表示满足 $P \leqslant A \leqslant Q$ 的所有矩阵 A 的集合,即

$$N[P,Q] = \{A \in R^{n\times n} \mid p_{ij} \leqslant a_{ij} \leqslant q_{ij}, i,j = 1,\cdots,n\} \tag{8.2}$$

我们说 A 为区间矩阵;或系统(8.1)为区间系统,也就是说,A 中的元素不能完全确定,但满足

$$A \in N[P,Q] \tag{8.3}$$

有关区间矩阵和区间系统的文献中基本上都是像式(8.1)~式(8.3)这样的描述方法。在本节中我们将给出另外一种等价的描述,以便发展本章的其它内容。为此我们令

$$A_0 = \frac{P+Q}{2}, H = \frac{Q-P}{2} \tag{8.4}$$

式(8.4)中的运算均为矩阵与标量数字的标准运算,显然,矩阵 H 的每一个元素都是非负数。我们定义矩阵

$$E = \left[\sqrt{h_{11}}e_1 \quad \cdots \quad \sqrt{h_{1n}}e_1 \quad \cdots \quad \sqrt{h_{n1}}e_n \quad \cdots \quad \sqrt{h_{nn}}e_n\right] \tag{8.5}$$

$$F = \left[\sqrt{h_{11}}e_1 \quad \cdots \quad \sqrt{h_{1n}}e_n \quad \cdots \quad \sqrt{h_{n1}}e_1 \quad \cdots \quad \sqrt{h_{nn}}e_n\right]^{\mathrm{T}} \tag{8.6}$$

这里 $e_i(i = 1,\cdots,n)$ 为 $n \times n$ 单位矩阵的第 i 个列向量,因此 E 为 $n \times n^2$ 阶矩阵,F 为 $n^2 \times n$ 阶矩阵。进一步定义矩阵集合

$$\Sigma^* = \{\Sigma \in R^{n^2\times n^2} \mid \Sigma = \mathrm{diag}[\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1n},\cdots,\varepsilon_{n1},\cdots,\varepsilon_{nn}], \\ |\varepsilon_{ij}| \leqslant 1, i,j = 1,\cdots,n\} \tag{8.7}$$

显然,$\forall \Sigma \in \Sigma^*$,$\Sigma$ 为 $n^2 \times n^2$阶对角矩阵,并且 $\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}} = \Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma \leqslant I_{n^2}$,$I_{n^2}$表示 n^2 阶单位矩阵。对于给定的矩阵 P,Q,我们定义矩阵

集合

$$M[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}] = \{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{E\Sigma F} \mid \boldsymbol{\Sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}^*\} \tag{8.8}$$

对于由式(8.2)和式(8.8)定义的矩阵集合有如下结论。

定理 8.1 对于给定的矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,有

$$M[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}] = N[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}] \tag{8.9}$$

证明 对于 $\forall \boldsymbol{A} \in N[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]$,有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \sum_{i,j=1}^{n} \epsilon_{ij}\boldsymbol{H}_{ij} \tag{8.10}$$

这里 ϵ_{ij} 是满足 $|\epsilon_{ij}| \leqslant 1(i,j=1,\cdots,n)$ 的标量,矩阵 $\boldsymbol{H}_{ij} \in R^{n\times n}$,它的$(i,j)$位置的元素为 $h_{ij}(i,j=1,\cdots,n)$,其余元素均为零。由于矩阵 $\boldsymbol{H}_{ij}$ 的秩至多为1,因此可以将它分解为一个列向量与一个行向量的乘积,即

$$\boldsymbol{H}_{ij} = \sqrt{h_{ij}}\boldsymbol{e}_i \times \sqrt{h_{ij}}\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}} \tag{8.11}$$

将式(8.11)代人式(8.10)可得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \sum_{i,j=1}^{n} \epsilon_{ij}\sqrt{h_{ij}}\boldsymbol{e}_i \times \sqrt{h_{ij}}\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}} \tag{8.12}$$

由式(8.5)、式(8.6)、式(8.7)可知,式(8.12)等价于存在 $\boldsymbol{\Sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}^*$,使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{E\Sigma F} \tag{8.13}$$

因此,由式(8.8),$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]$。进一步,由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意性,可得

$$N[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}] \subseteq M[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}] \tag{8.14}$$

另一方面,由于上述步步可逆,因此也可以得到

$$N[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}] \supseteq M[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}] \tag{8.15}$$

故由式(8.14)和式(8.15),定理的结论成立。

由定理 8.1,区间系统(8.1) 可描述为

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + E\Sigma F x(t) \tag{8.16}$$

其中矩阵 A_0, E, F, Σ 分别由式(8.4) ~ 式(8.7) 所定义,区间系统的这个描述是本章讨论的基础。

8.2 区间系统的鲁棒控制

8.2.1 鲁棒稳定性分析

定义 8.1 如果对于集合 $N[P,Q]$ 中的任意矩阵 A,系统(8.1) 都是渐近稳定的,那么称系统(8.1) 为鲁棒稳定的。

为了推导本节的主要结果,需要下面的引理。

引理 8.1 假设 $\Sigma \in \Sigma^*$,那么对于任意适当维数的列向量 ξ 和 η,对于任意常数 $\lambda > 0$,使得下式成立:

$$2\xi^{T}\Sigma\eta \leqslant \frac{1}{\lambda}\xi^{T}\xi + \lambda\eta^{T}\eta \tag{8.17}$$

证明　由于对 $\forall \Sigma \in \Sigma^*, \Sigma\Sigma^{T} = \Sigma^{T}\Sigma \leqslant I$,因此对于任意常数 $\lambda > 0$,

$$0 \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\xi - \sqrt{\lambda}\Sigma\eta\right)^{T}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\xi - \sqrt{\lambda}\Sigma\eta\right) =$$

$$\frac{1}{\lambda}\xi^{T}\xi - 2\xi^{T}\Sigma\eta + \lambda\eta^{T}\Sigma^{T}\Sigma\eta \leqslant \frac{1}{\eta}\xi^{T}\xi - 2\xi^{T}\Sigma\eta + \lambda\eta^{T}\eta$$

故式(8.17) 成立。

引理证毕。

定理 8.2 如果存在标量 $\lambda > 0$ 和对称正定矩阵 X 使下列 Riccati 不等式方程成立,即

$$XA_0 + A_0^{T}X + \frac{1}{\lambda}XEE^{T}X + \lambda F^{T}F < 0 \tag{8.18}$$

那么区间系统(8.1)是鲁棒稳定的。这里 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$ 由式(8.5)和式(8.6)所定义。

证明　设 λ 和 $\boldsymbol{X}$ 分别为满足式(8.18)的标量和对称正定矩阵,我们构造如下李亚普诺夫泛函

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{x} \tag{8.19}$$

并令

$$\boldsymbol{Y} = -\left(\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\right) > 0 \tag{8.20}$$

式(8.19)沿系统(8.16)的解,对时间的求导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} = {} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\boldsymbol{x}(t) + \\ & 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t), \forall\, \boldsymbol{\Sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}^*\end{aligned} \tag{8.21}$$

对式(8.21)的最后一项,利用引理 8.1,有

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{F} \leqslant {} & \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{x}(t) + \\ & \lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t), \forall\, \boldsymbol{\Sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}^*\end{aligned} \tag{8.22}$$

将式(8.22)代入式(8.21),并利用式(8.20)进行整理可得

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t} \leqslant -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Y}\boldsymbol{x}(t)$$

根据李亚普诺夫稳定性定理,系统(8.16)是鲁棒稳定的,因此由定理 8.2,区间系统 8.1 是鲁棒稳定的。

注记 8.1　区间系统(8.1)鲁棒稳定的一个必要条件是标称系统应该是渐近稳定的,即矩阵 $\boldsymbol{A}_0$ 是渐近稳定的,这一点虽然没有在定理 8.2 中明确提出,但是式(8.18)只有当 $\boldsymbol{A}_0$ 是渐近稳定的时候,才能存在对称正定解 $\boldsymbol{X}$。因此定理 8.2 隐含着这个必要条件。

注记 8.2　由引理 8.2 和引理 8.3 可知,定理 8.2 中条件等价于下列两个条件:

(C1) A_0 是渐近稳定的,且

$$\| F(sI - A_0)^{-1}E \|_\infty < 1 \tag{8.23}$$

或者

(C2) 存在标量 $\lambda > 0, \varepsilon > 0$,使代数 Riccati 方程

$$XA_0 + A_0^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\lambda}XEE^{\mathrm{T}}X + \lambda F^{\mathrm{T}}F + \varepsilon I = 0 \tag{8.24}$$

存在惟一的对称正定矩阵解 X。

注记 8.3 尽管 $E, F^{\mathrm{T}} \in R^{n \times n^2}$,但是式(8.18) 和式(8.24) 只与矩阵 EE^{T} 和 $F^{\mathrm{T}}F$ 有关,而它们均为 n 阶对角矩阵,具体地,通过简单的计算可得

$$EE^{\mathrm{T}} = \mathrm{diag}\left[\sum_{j=1}^{n} h_{1j} \quad \cdots \quad \sum_{j=1}^{n} h_{nj}\right] \tag{8.25}$$

$$F^{\mathrm{T}}F = \mathrm{diag}\left[\sum_{j=1}^{n} h_{j1} \quad \cdots \quad \sum_{j=1}^{n} h_{jn}\right] \tag{8.26}$$

因此虽然在式(8.18) 和式(8.24) 中有高阶矩阵,但代数 Riccati 不等式(等式) 方程仍是关于 n 矩阵的。进一步,可将式(8.18)、式(8.23) 和式(8.24) 中的 E 和 F 分别换为满秩矩阵 E_0 和 F_0,而这里矩阵 E_0 和 F_0 分别满足 $E_0E_0^{\mathrm{T}} = EE^{\mathrm{T}}$ 和 $F_0^{\mathrm{T}}F_0 = F^{\mathrm{T}}F$。

注记 8.4 由式(8.25) 和式(8.26) 以及矩阵的无穷范数的定义[7,8],有

$$EE^{\mathrm{T}} + F^{\mathrm{T}}F \leqslant (\| H \|_\infty + \| H^{\mathrm{T}} \|_\infty)I \tag{8.27}$$

因此如果文献[10] 中的主要定理(定理 1) 成立,那么取 $\lambda = 1$ 时,$X = I$ 是满足 Riccati 不等式方程的正定矩阵。这也说明文献[10] 的主要结果是定理 8.2 的推论。

例 8.1[10,9] 考虑区间系统(8.1),其中

$$P = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

由式(8.4)计算可得

$$A_0 = \begin{bmatrix} -4 & 1.5 \\ 4.5 & -5 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

那么 E 和 F 分别为

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{0.5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{0.5} & 1 \end{bmatrix}, F^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{0.5} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.5} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

利用 Matlab 软件计算可得

$$\| F(sI - A_0)^{-1} E_{\infty} \| = 0.8807 < 1$$

因此该例的区间系统是鲁棒稳定的。虽然与文献[10,9]中得到的结论相同，但是借助于 Matlab 软件，我们得到的判据要简单得多。

例 8.2[11,12]　考虑区间系统(8.1)，其中

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ -4 & 1 & -4 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

由此可得

$$A_0 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

在这里，可以取

$$E_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, F_0^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

经过计算可得

$$\| F_0(sI - A_0)^{-1} E_0 \|_{\infty} = 0.8694 < 1$$

因此该例的区间系统是鲁棒稳定的。从该例可以看出，即使对于高

阶系统，本节的判据也比已有的判据[12]算法简单。

8.2.2 鲁棒镇定

本节考虑如下的区间控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{8.28}$$

这里，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ 为状态向量，$\boldsymbol{A} \in R^{n\times n}$ 为状态矩阵，且 $\boldsymbol{A} \in N[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}]$；$\boldsymbol{u} \in R^p$ 为控制输入，$\boldsymbol{B}$ 为适当维数的矩阵。

定义 8.2 如果存在线性状态反馈控制器

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) \tag{8.29}$$

使由式(8.28)和式(8.29)构成的闭环区间系统是鲁棒稳定的，则称控制器(8.29)为镇定区间系统(8.28)。

首先，假设 $\boldsymbol{B}$ 为适当维数的定常矩阵。

将式(8.29)代入式(8.28)，得到闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t) \tag{8.30}$$

由注记 8.2 可知，当 A_0 是渐近稳定的，且

$$\| \boldsymbol{F}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0 - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{E} \|_\infty < 1 \tag{8.31}$$

时，则闭环系统(8.30)是鲁棒稳定的。为了给出控制器的解析式，有如下结论：

定理 8.3 对于给定的被控对象 (8.28)，如果存在标量 $\lambda > 0, \mu > 0$，和对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足下列 Riccati 不等式方程

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\left(\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} < 0 \tag{8.32}$$

或者存在 $\lambda > 0$，$\mu > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，使得下列代数 Riccati 方程

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\left(\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} + \varepsilon\boldsymbol{I} = 0 \tag{8.33}$$

有对称正定的矩阵解 $\boldsymbol{X}$，那么，存在鲁棒镇定控制器(8.29)。并且，

在这种两种情况下

$$K = -\frac{1}{2\mu}B^{\mathrm{T}}X \tag{8.34}$$

这里 E, F 由式(8.5)和式(8.6)所定义。

证明　为了方便起见,令

$$A_K = A_0 + BK = A_0 - \frac{1}{2\mu}BB^{\mathrm{T}}X \tag{8.35}$$

这样,式(8.32)和式(8.33)分别被化为

$$XA_K + A_K^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\lambda}XEE^{\mathrm{T}}X + \lambda F^{\mathrm{T}}F < 0 \tag{8.36}$$

和

$$XA_K + A_K^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\lambda}XEE^{\mathrm{T}}X + \lambda F^{\mathrm{T}}F + \varepsilon I = 0 \tag{8.37}$$

根据定理8.2和注记8.2,在式(8.32)或式(8.33)成立时,闭环系统(8.30)是鲁棒稳定的,即被控对象(8.28)可由控制器(8.29)实现鲁棒镇定。

其次,考虑 B 也为适当维数的区间矩阵,即 $B \in N[S, T]$;同样令

$$B_0 = \frac{S+T}{2}, G = \frac{T-S}{2} \tag{8.38}$$

式(8.38)中的运算均为矩阵与标量数字的标准运算,显然,矩阵 G 的每一个元素都是非负数。我们定义矩阵

$$E_B = \left[\sqrt{g_{11}}e_1 \quad \cdots \quad \sqrt{g_{1p}}e_1 \quad \cdots \quad \sqrt{g_{n1}}e_n \quad \cdots \quad \sqrt{g_{np}}e_n\right] \tag{8.39}$$

$$F_B = \left[\sqrt{g_{11}}f_1 \quad \cdots \quad \sqrt{g_{1p}}f_p \quad \cdots \quad \sqrt{g_{n1}}f_1 \quad \cdots \quad \sqrt{g_{np}}f_p\right]^{\mathrm{T}} \tag{8.40}$$

这里 $e_i(i=1,\cdots,n)$ 为 $n \times n$ 单位矩阵的第 i 个列向量,$f_i(i=$

$1,\cdots,p$）为 $p\times p$ 单位矩阵的第 i 个列向量，因此 $\boldsymbol{E}_B$ 为 $n\times np$ 阶矩阵，$\boldsymbol{F}_B$ 为 $np\times p$ 阶矩阵。进一步定义矩阵集合

$$\boldsymbol{\Sigma}_B^* = \{\boldsymbol{\Sigma}_B \in \boldsymbol{R}^{np\times np} \mid \boldsymbol{\Sigma}_B = \\ \mathrm{diag}[\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1p},\cdots,\varepsilon_{n1},\cdots,\varepsilon_{np}], \\ |\varepsilon_{ij}| \leqslant 1, i = 1,\cdots,n, j = 1,\cdots,p\} \tag{8.41}$$

显然，$\forall\, \boldsymbol{\Sigma}_B \in \boldsymbol{\Sigma}_B^*$，$\boldsymbol{\Sigma}_B$ 为 $np\times np$ 阶对角矩阵，并且 $\boldsymbol{\Sigma}_B\boldsymbol{\Sigma}_B^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Sigma}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_B \leqslant \boldsymbol{I}_{np}$，$\boldsymbol{I}_{np}$ 表示 np 阶单位矩阵。对于给定的矩阵 $\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}$，我们定义矩阵集合

$$M[\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}] = \{\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{E}_B\boldsymbol{\Sigma}_B\boldsymbol{F}_B \mid \boldsymbol{\Sigma}_B \in \boldsymbol{\Sigma}_B^*\} \tag{8.42}$$

由定理 8.1，区间控制系统(8.28)可描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{E\Sigma F x}(t) + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{E}_B\boldsymbol{\Sigma}_B\boldsymbol{F}_B\boldsymbol{u}(t) \tag{8.43}$$

将式(8.29)代入系统(8.28)，可得闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{E\Sigma F x}(t) + \boldsymbol{E}_B\boldsymbol{\Sigma}_B\boldsymbol{F}_B\boldsymbol{K x}(t) = \\ (\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t) + [\boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{E}_B]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma} & \\ & \boldsymbol{\Sigma}_B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{F}_B\boldsymbol{K}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) \tag{8.44}$$

定理 8.4 对于给定的被控对象(8.28)，假设 $\boldsymbol{F}_B$ 是列满秩的。如果存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足下列 Riccati 不等式方程

$$\boldsymbol{XA}_0 + \boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{E}_B\boldsymbol{E}_B^{\mathrm{T}} - \\ \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{F}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_B)^{-1}\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} < 0 \tag{8.45}$$

或者存在 $\varepsilon > 0$，使得下列代数 Riccati 方程

$$\boldsymbol{XA}_0 + \boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{E}_B\boldsymbol{E}_B^{\mathrm{T}} - \\ \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{F}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_B)^{-1}\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} + \varepsilon\boldsymbol{I} = 0 \tag{8.46}$$

有对称正定的矩阵解 $\boldsymbol{X}$，那么，存在鲁棒镇定控制器(8.29)。并且，

在这两种情况下

$$K = -(F_B^{\mathrm{T}}F_B)^{-1}B_0^{\mathrm{T}}X \tag{8.47}$$

证明 由定理 8.2，如果存在对称正定矩阵 X 满足下列 Riccati 不等式方程

$$XA_0 + A_0^{\mathrm{T}}X + X[E \quad E_B][E \quad E_B]^{\mathrm{T}}X + \begin{bmatrix} F \\ F_BK \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} F \\ F_BK \end{bmatrix} < 0 \tag{8.48}$$

那么闭环系统(8.44)是鲁棒稳定的。将式(8.48)整理可得

$$\begin{gathered} XA_0 + A_0^{\mathrm{T}}X + X(EE^{\mathrm{T}} + E_BE_B^{\mathrm{T}} - \\ B_0(F_B^{\mathrm{T}}F_B)^{-1}B_0^{\mathrm{T}})X + F^{\mathrm{T}}F[K + (F_B^{\mathrm{T}}F_B)^{-1}B_0^{\mathrm{T}}X]^{\mathrm{T}} \cdot \\ (F_B^{\mathrm{T}}F_B)[K + (F_B^{\mathrm{T}}F_B)^{-1}B_0^{\mathrm{T}}X] < 0 \end{gathered} \tag{8.49}$$

因此当控制器为(8.47)时，Riccati 不等式方程(8.45)等价于 Riccati 不等式方程(8.48)。该定理的其余部分由注记 8.2 可以得证。

8.2.3 干扰抑制问题

考虑有外部干扰的区间控制系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + Bu(t) \tag{8.50a}$$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{8.50b}$$

这里，$x \in R^n$ 为状态向量，$u \in R^m$ 为控制向量，$z \in R^q$ 为评价信号，$w \in R^p$ 为平方可积的外部干扰信号，B、C、D 为适当维数的常数矩阵，A 为系统矩阵，并且假设 $A \in N[P,Q]$。

本小节研究的问题是：如何设计线性状态反馈控制器

$$u(t) = Kx(t) \tag{8.51}$$

使区间控制系统(8.50)满足如下性能指标：

(Ⅰ) 当 $w = 0$ 时，对 $\forall A \in N[P,Q]$，闭环系统内部稳定，即

$A+BK$ 渐近稳定的;

(II) 对于 $\forall A \in N[P,Q]$,闭环系统满足

$$\| T_{zw}(j\omega) \|_{\infty} \leqslant \gamma \tag{8.52}$$

其中,$T_{zw}(s)=(C+DK)(sI-A-BK)^{-1}B_1$ 为闭环系统的干扰到评价信号的传递函数。$\gamma>0$ 为给定常数,表示系统抑制干扰的水平。

为简化数学推导,首先考虑在式(8.50b) 中 $D=0$ 的情形。对此,有如下结论:

定理8.5 对于给定的 $\gamma>0$,如果存在常数 $\varepsilon>0$ 和 $\lambda>0$,以及对称正定矩阵 X,使下列代数 Riccati 不等式方程

$$A_0^{\mathrm T}X+XA_0+X(\lambda^{-2}EE^{\mathrm T}+\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm T}-\varepsilon^2BB^{\mathrm T})X+\lambda^2F^{\mathrm T}F+C^{\mathrm T}C<0 \tag{8.53}$$

成立,那么存在状态反馈矩阵 K,使闭环系统(8.50) 和(8.51) 同时满足性能指标(I) 和(II)。并且在这种情况下

$$K=-\frac{1}{2\varepsilon^2}B^{\mathrm T}X \tag{8.54}$$

这里 E,F 由式(8.5) 和式(8.6) 所定义。

证明　设 X 是式(8.53) 的对称正定解,令

$$A_K=A+BK=A-\frac{1}{2\varepsilon^2}B^{\mathrm T}X,\ \forall A\in[P,Q] \tag{8.55}$$

那么式(8.53) 的对称正定解 K,使下列 Riccati 不等式

$$A_K^{\mathrm T}X+XA_K+\gamma^{-2}XB_1B_1^{\mathrm T}X+C^{\mathrm T}C<0,\ \forall A\in N[P,Q] \tag{8.56}$$

成立。由定理 8.2,线性状态反馈器(8.54) 使闭环系统(8.50) 和(8.51) 满足性能指标(I)。

下面证明闭环系统满足性能指标(II)。

式(8.56) 等价于

$$-(\mathrm{j}\omega \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_K)^* \boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}(\mathrm{j}\omega \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_K)+\gamma^{-2}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}<0, \forall \omega \geqslant 0, \forall \boldsymbol{A} \in N[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}] \quad (8.57)$$

这里上标 * 表示复数矩阵的共轭转置。对式(8.57) 两边左乘 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}[(\mathrm{j}\omega \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_K)^*]^{-1}$，右乘 $(\mathrm{j}\omega \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_K)^{-1}\boldsymbol{B}$，并令 $\boldsymbol{Y}(\mathrm{j}\omega)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(\mathrm{j}\omega \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_K)^{-1}\boldsymbol{B}$，那么整理可得

$$-\boldsymbol{Y}(\mathrm{j}\omega)-\boldsymbol{Y}^*(\mathrm{j}\omega)+\gamma^{-2}\boldsymbol{Y}^*(\mathrm{j}\omega)\boldsymbol{Y}(\mathrm{j}\omega)+ \boldsymbol{T}_{z\omega}^*(\mathrm{j}\omega)\boldsymbol{T}_{z\omega}(\mathrm{j}\omega) \leqslant 0 \quad (8.58)$$

进一步，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_{z\omega}^*(\mathrm{j}\omega)\boldsymbol{T}_{z\omega}(\mathrm{j}\omega) &\leqslant \\ \gamma^2\boldsymbol{I}-\gamma^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Y}(\mathrm{j}\omega)+\boldsymbol{Y}^*(\mathrm{j}\omega)-\gamma^{-2}\boldsymbol{Y}^*(\mathrm{j}\omega)\boldsymbol{Y}(\mathrm{j}\omega) &= \\ \gamma^2\boldsymbol{I}-[\gamma\boldsymbol{I}-\gamma^{-1}\boldsymbol{Y}(\mathrm{j}\omega)]^*[\gamma\boldsymbol{I}-\gamma^{-1}\boldsymbol{Y}(\mathrm{j}\omega)] &\leqslant \gamma^2\boldsymbol{I}\end{aligned} \quad (8.59)$$

由 H_∞ 范数的定义，式(8.59) 等价于式(8.52)，即闭环系统满足性能指标(II)。

对于 $\boldsymbol{D} \neq 0$ 的情形，假设 $\mathrm{rank}(d)=m$，我们给出如下结论：

定理 8.6 对于给定的 $\gamma>0$，如果存在常数 $\lambda>0$，使代数 Riccati 不等式方程

$$\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{X}(\lambda^{-2}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}+\lambda^2\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}- (\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})<0 \quad (8.60)$$

有对称正定解 $\boldsymbol{X}$，那么存在状态反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$，使闭环系统(8.50a) 同时满足性能指标(I) 和(II)。在这种情况下

$$\boldsymbol{K}=-(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}) \quad (8.61)$$

这里 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{F}$ 由式(8.5) 和式(8.6) 所定义。

定理 8.6 的证明同定理 8.5 的证明过程相似，只是数学推导繁琐，故该定理的证明在此略去。

8.3 时滞区间系统的鲁棒控制

前两章和这一章的前几节，分别研究了时滞系统和区间系统的鲁棒控制问题。但是在实际工程控制系统中，往往既具有参数不确定，又存在时间滞后。因此，许多实际系统都是时滞区间控制系统，例如飞行控制系统等。关于区间系统和滞后系统的研究已取得了许多结果。但是，即使关于时滞区间系统鲁棒稳定性的研究也还不多，有的结果用矩阵的测度和范数表示，保守性较大。这一节将利用 Riccati 方程方法研究时滞区间控制系统的鲁棒控制问题。

8.3.1 鲁棒稳定性分析

考虑下述方程描述的线性动态系统

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{A}_d x(t-\tau), \tau \geqslant 0 \tag{8.62}$$

这里，$x \in \boldsymbol{R}^n$ 为状态向量，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_d \in R^{n\times n}$ 为系统矩阵和时滞系数矩阵，$\tau \geqslant 0$ 为时间滞后量。$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_d$ 中的元素不能完全确定，但是，它们属于某些确定的区间，因此我们将系统(8.62) 称为时滞区间系统。同前一节的记号类似，假设 $\boldsymbol{A} \in N[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}], \boldsymbol{A}_d \in N[\boldsymbol{P}_d, \boldsymbol{Q}_d,]$ 这里的 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}_d, \boldsymbol{Q}_d$ 为确定的矩阵。

定义 8.3 如果对于集合 $N[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}]$ 中的任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和集合 $N[\boldsymbol{P}_d, \boldsymbol{Q}_d]$ 的任意矩阵 $\boldsymbol{A}_d$，以及任意的时间滞后量 $\tau \geqslant 0$，系统(8.62) 都是渐近稳定的，那么称系统(8.62) 为时滞独立鲁棒稳定的。

令

$$\boldsymbol{A}_0 = \frac{\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}}{2}, \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P}}{2}$$

$$\boldsymbol{A}_{d0} = \frac{\boldsymbol{P}_d+\boldsymbol{Q}_d}{2}, \boldsymbol{H}_d = \frac{\boldsymbol{Q}_d-\boldsymbol{P}_d}{2}$$

显然，$\boldsymbol{H}$ 和$\boldsymbol{H}_d$ 的每一个元素都是非负数，由定理8.2，时滞区间系统(8.62) 等价于下列不确定性系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{E\Sigma F})\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{A}_{d0} + \boldsymbol{E}_d\boldsymbol{\Sigma F}_d)\boldsymbol{x}(t-\tau) \tag{8.63}$$

其中

$$\boldsymbol{E} = \left[\sqrt{h_{11}}\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \sqrt{h_{1n}}\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \sqrt{h_{n1}}\boldsymbol{e}_n \quad \cdots \quad \sqrt{h_{nn}}\boldsymbol{e}_n\right] \tag{8.64}$$

$$\boldsymbol{E}_d = \left[\sqrt{h_{d11}}\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \sqrt{h_{d1n}}\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \sqrt{h_{dn1}}\boldsymbol{e}_n \quad \cdots \quad \sqrt{h_{dnn}}\boldsymbol{e}_n\right] \tag{8.65}$$

$$\boldsymbol{F} = \left[\sqrt{h_{11}}\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \sqrt{h_{1n}}\boldsymbol{e}_n \quad \cdots \quad \sqrt{h_{n1}}\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \sqrt{h_{nn}}\boldsymbol{e}_n\right]^{\mathrm{T}} \tag{8.66}$$

$$\boldsymbol{F}_d = \left[\sqrt{h_{d11}}\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \sqrt{h_{d1n}}\boldsymbol{e}_n \quad \cdots \quad \sqrt{h_{dn1}}\boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \sqrt{h_{dnn}}\boldsymbol{e}_n\right]^{\mathrm{T}} \tag{8.67}$$

这里 $\boldsymbol{e}_i(i=1,\cdots,n)$ 为 n 阶单位矩阵的第 i 个列向量，$\boldsymbol{E}$ 和$\boldsymbol{E}_d$ 为 $n \times n^2$ 阶矩阵，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}_d$ 为$n^2 \times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{\Sigma}$ 为$n^2 \times n^2$ 阶对角矩阵，并且 $\boldsymbol{\Sigma\Sigma}^{\mathrm{T}} \leqslant \boldsymbol{I}_{n^2}$，$\boldsymbol{I}_{n^2}$表示 n^2 阶单位矩阵。这样，我们将区间矩阵的不确定性转化为矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的不确定性。

将式(8.63) 中的 $\boldsymbol{A}_{d0}$ 作满秩分解可得

$$\boldsymbol{A}_{d0} = \boldsymbol{E}_{d0}\boldsymbol{F}_{d0} \tag{8.68}$$

其中 $\boldsymbol{E}_{d0}, \boldsymbol{F}_{d0}^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^{n\times r}$，这里 $r = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}_{d0}$。

定理8.7 （鲁棒稳定性定理）如果存在常数 $\lambda > 0, \lambda_d > 0$ 和 $\lambda_{d0} > 0$，使下列代数 Riccati 不等式方程

$$\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{XA}_0 + \boldsymbol{X}(\lambda^{-1}\boldsymbol{EE}^{\mathrm{T}} + \lambda_d^{-1}\boldsymbol{E}_d\boldsymbol{E}_d^{\mathrm{T}} + \lambda_{d0}^{-1}\boldsymbol{E}_{d0}\boldsymbol{E}_{d0}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X} +$$

$$\lambda \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} + \lambda_d \boldsymbol{F}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_d + \lambda_{d0}\boldsymbol{F}_{d0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{d0} < 0 \tag{8.69}$$

存在对称正定解 $\boldsymbol{X}$,那么时滞区间控制系统(8.62)是时滞独立鲁棒稳定的。

证明　设 $\boldsymbol{X}$ 是式(8.69)的对称正定解,令不等式(8.69)左边的矩阵为 $-\boldsymbol{S}$,则显然,$\boldsymbol{S}$ 为对称正定矩阵。构造二次李亚普诺夫泛函

$$\boldsymbol{V}(x) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{x}(t) + \int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)[\lambda_d \boldsymbol{F}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_d + \lambda_{d0}\boldsymbol{F}_{d0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{d0}]\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s \tag{8.70}$$

这里 $\boldsymbol{X},\lambda_d,\lambda_{d0}$ 取自于式(8.69)。将式(8.70)沿系统(8.63)的解对时间求导可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = {} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_0]\boldsymbol{x}(t) + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t) + \\ & 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_{d0}\boldsymbol{F}_{d0}\boldsymbol{x}(t-\tau) + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_d\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{F}_d\boldsymbol{x}(t-\tau) + \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[\lambda_d\boldsymbol{F}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_d + \lambda_{d0}\boldsymbol{F}_{d0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{d0}]x(t) - \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)[\lambda_d\boldsymbol{F}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_d + \lambda_{d0}\boldsymbol{F}_{d0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{d0}]\boldsymbol{x}(t-\tau)\end{aligned} \tag{8.71}$$

对式(8.71)中的第2项、第3项、第4项应用引理8.1中的不等式可得

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t) \leqslant \lambda^{-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{x}(t) + \lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t)$$

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_{d0}\boldsymbol{F}_{d0}\boldsymbol{x}(t-\tau) \leqslant \lambda_{d0}^{-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_{d0}\boldsymbol{E}_{d0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{x}(t) + \lambda_{d0}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{F}_{d0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{d0}\boldsymbol{x}(t-\tau)$$

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_d\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{F}_d\boldsymbol{x}(t-\tau) \leqslant \lambda_d^{-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}_d\boldsymbol{E}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{x}(t) + \lambda_d\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{F}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_d\boldsymbol{x}(t-\tau)$$

将这些不等式代入式(8.17),有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqslant -\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(t) < 0$$

由李亚普诺夫稳定性原理，定理 8.7 成立。

注记 8.5 如果将这里的 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}_d,\boldsymbol{E}_{d0}$ 合成一个大矩阵，即 $\overline{\boldsymbol{E}} = [\boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{E}_d \quad \boldsymbol{E}_{d0}]$，同样将这里的 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_d,\boldsymbol{F}_{d0}$ 也合成一个大矩阵 $\overline{\boldsymbol{F}} = [\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{F}_d^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{F}_{d0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，并令 $\lambda = \lambda_d = \lambda_{d0}$，那么式(8.69)化为

$$\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{X}\lambda^{-1}\overline{\boldsymbol{E}}\,\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \lambda\overline{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{F}} < 0 \tag{8.72}$$

而 Riccati 不等式方程(8.72)与定理 8.3 中的 Riccati 不等式方程完全类似，因此由注记 8.2，下面两个条件也是时滞区间系统(8.62)鲁棒稳定的充分条件：

(C1) $\boldsymbol{A}_0$ 是渐近稳定的，且

$$\| \overline{\boldsymbol{F}}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0)^{-1}\overline{\boldsymbol{E}} \|_{\infty} < 1 \tag{8.73}$$

或者

(C2) 存在标量 $\lambda > 0, \varepsilon > 0$，使代数 Riccati 方程

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{X}\overline{\boldsymbol{E}}\,\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \lambda\overline{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{F}} + \varepsilon\boldsymbol{I} = 0 \tag{8.74}$$

存在惟一的对称正定矩阵解 $\boldsymbol{X}$。

同样地，可将条件(C1)和(C2)中的 $\overline{\boldsymbol{E}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{F}}$ 分别换为满秩矩阵 $\overline{\boldsymbol{E}}_0$ 和 $\overline{\boldsymbol{F}}_0$，而这里矩阵 $\overline{\boldsymbol{E}}_0$ 和 $\overline{\boldsymbol{F}}_0$ 分别满足 $\overline{\boldsymbol{E}}_0\overline{\boldsymbol{E}}_0^{\mathrm{T}} = \overline{\boldsymbol{E}}\,\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{F}}_0^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{F}}_0 = \overline{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{F}}$。

例 8.3 考虑时滞区间系统(8.62)，其中

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_d = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Q}_d = \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

由计算可得

$$A_0 = \begin{bmatrix} -6.5 & 1.5 \\ 3.5 & -8 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{d0} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, H_d = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

经过计算可得

$$EE^{\mathrm{T}} + E_{d0}E_{d0}^{\mathrm{T}} + E_dE_d^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$F^{\mathrm{T}}F + F_{d0}^{\mathrm{T}}F_{d0} + F_d^{\mathrm{T}}F_d = \begin{bmatrix} 3.75 & 0.75 \\ 0.75 & 3.25 \end{bmatrix}$$

取$\overline{E}_0$和$\overline{F}_0$如下：

$$\overline{E}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \overline{F}_0 = \begin{bmatrix} 1.9260 & 0.2108 \\ 0.2108 & 1.7915 \end{bmatrix}$$

利用 Matlab 软件计算可得

$$\| \overline{F}_0(sI - A_0)^{-1} \overline{E}_0 \|_\infty = 0.9178 < 1$$

因此该例中的时滞区间系统是时滞独立鲁棒稳定的。

8.3.2 鲁棒镇定

本小节考虑如下的时滞区间控制系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_dx(t-\tau) + Bu(t), \tau \geqslant 0 \quad (8.75)$$

这里，$x \in R^n$ 为状态向量，$A, A_d \in R^{n\times n}$ 为系统矩阵和时滞系数矩阵，$\tau \geqslant 0$ 为时间滞后量。$u \in R^p$ 为控制输入。A, A_d 中的元素不能完全确定，但是，它们属于某些确定的区间，同前一节的记号类似，假设 $A \in N[P,Q]$，$A_d \in N[P_d, Q_d]$，这里的 P,Q,P_d,Q_d 为确定的矩阵。B 为适当维数的矩阵，我们将分两种情况进行讨论。本小节中出现的符号与上一小节同样符号的意义相同。

定义 8.4 如果存在线性状态反馈控制器

$$u(t) = Kx(t) \quad (8.76)$$

使由式(8.75)和式(8.76)构成的闭环区间系统是时滞独立鲁棒稳定的,则称控制器(8.76)为镇定时滞区间系统(8.75)。由于控制器(8.76)与时间滞后量无关,因此称为无记忆控制器。现分以下两种情况进行讨论:

(1) 假设 $\boldsymbol{B}$ 为适当维数的定常矩阵。

将式(8.76)代入式(8.75),得到闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-\tau) \tag{8.77}$$

我们有如下结论:

定理 8.8 对于给定的被控对象(8.75),如果存在标量 $\lambda > 0$, $\mu > 0$ 和对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足下列 Riccati 不等式方程

$$\boldsymbol{XA}_0 + \boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\left(\frac{1}{\lambda}\overline{\boldsymbol{E}}\,\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mu}\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{X} + \lambda\overline{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{F}} < 0 \tag{8.78}$$

或者存在 $\lambda > 0$, $\mu > 0$ 和 $\epsilon > 0$,使得下列代数 Riccati 方程

$$\boldsymbol{XA}_0 + \boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\left(\frac{1}{\lambda}\overline{\boldsymbol{E}}\,\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mu}\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{X} + \lambda\overline{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{F}} + \epsilon\boldsymbol{I} = 0 \tag{8.79}$$

有对称正定的矩阵解 $\boldsymbol{X}$,那么,存在无记忆鲁棒镇定控制器(8.76)。并且,在这两种情况下

$$\boldsymbol{K} = -\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \tag{8.80}$$

证明　利用定理 8.2,定理 8.7 和注记 8.5,本定理的证明是直接的。故在此略去。

(2) 考虑 $\boldsymbol{B}$ 也为适当维数的区间矩阵,即 $\boldsymbol{B} \in N[\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}]$;同前面的记号相同,有时滞区间控制系统(8.75)等价于以下系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{E\Sigma F})\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{A}_{d0} + \boldsymbol{E}_d\boldsymbol{\Sigma F}_d)\boldsymbol{x}(t-\tau) + \\ (\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{E}_B\boldsymbol{\Sigma}_B\boldsymbol{F}_B)\boldsymbol{u}(t), \tau \geqslant 0 \tag{8.81}$$

将式(8.76)代入系统(8.81),可得闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)+$$
$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{E}_B\boldsymbol{\Sigma}_B\boldsymbol{F}_B\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=$$
$$(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{A}_{d0}+\boldsymbol{E}_d\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{F}_d)\boldsymbol{x}(t-\tau)+$$
$$[\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{E}_B]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma} & \\ & \boldsymbol{\Sigma}_B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{F}_B\boldsymbol{K}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) \tag{8.82}$$

定理 8.9 对于给定的被控对象(8.108),假设 $\boldsymbol{F}_B$ 是列满秩的。如果存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足下列 Riccati 不等式方程

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}(\overline{\boldsymbol{E}}\,\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}_B\boldsymbol{E}_B^{\mathrm{T}}-$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{F}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_B)^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}+\overline{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\,\overline{\boldsymbol{F}}<0 \tag{8.83}$$

或者存在 $\varepsilon>0$,使得下列代数 Riccati 方程

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}(\overline{\boldsymbol{E}}\,\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}_B\boldsymbol{E}_B^{\mathrm{T}}-$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{F}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_B)^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}+\overline{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\,\overline{\boldsymbol{F}}+\varepsilon\boldsymbol{I}=0 \tag{8.84}$$

有对称正定的矩阵解 $\boldsymbol{X}$,那么,存在鲁棒镇定控制器(8.29)。并且,在这两种情况下

$$\boldsymbol{K}=-(\boldsymbol{F}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_B)^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \tag{8.85}$$

证明 由定理 8.7,仿照定理 8.4 的证明过程,可得到本定理的证明。

8.3.3 干扰抑制问题

考虑有外部干扰的时滞区间控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-\tau)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{w}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\tau\geqslant 0 \tag{8.86a}$$

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{8.86b}$$

这里,$\boldsymbol{x}\in R^n$ 为状态向量,$\boldsymbol{u}\in R^m$ 为控制向量,$\boldsymbol{z}\in R^q$ 为评价

信号，$w \in R^p$ 为平方可积的外部干扰信号，$\tau \geqslant 0$ 为时间滞后量。$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 为适当维数的常数矩阵，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_d \in R^{n \times n}$ 为系统矩阵和时滞系数矩阵，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_d$ 中的元素不能完全确定，但是，它们属于某些确定的区间。同前一节的记号类似，假设 $\boldsymbol{A} \in N[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]$，$\boldsymbol{A}_d \in N[\boldsymbol{P}_d,\boldsymbol{Q}_d]$，这里的 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}_d,\boldsymbol{Q}_d$ 为确定的矩阵。本小节中出现的符号与上一小节同样符号的意义相同。

本小节研究的问题是：如何设计无记忆状态反馈控制器

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) \tag{8.87}$$

使闭环时滞区间系统(8.86) 和(8.87) 满足如下性能指标：

(1) 当 $\omega = 0$ 时，对 $\boldsymbol{A} \in N[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]$，$\boldsymbol{A}_d \in N[\boldsymbol{P}_d,\boldsymbol{Q}_d]$，闭环系统内部稳定，即 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}$ 为渐近稳定的。

(2) 对于 $\boldsymbol{A} \in N[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]$，$\boldsymbol{A}_d \in N[\boldsymbol{P}_d,\boldsymbol{Q}_d]$，闭环系统满足

$$\| \boldsymbol{T}_{z\omega}(\mathrm{j}\omega) \|_\infty \leqslant \gamma \tag{8.88}$$

其中，$\boldsymbol{T}_{z\omega}(s) = (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{DK})(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{B}_1$ 为闭环系统的干扰信号到评价信号的传递函数。$\gamma > 0$ 为给定常数，表示对抑制干扰的水平。

对于这个问题，首先讨论式(8.50b) 中 $\boldsymbol{D} = 0$ 的情形，有如下结论：

定理 8.10 对于给定的 $\gamma > 0$，如果存在常数 $\epsilon > 0$ 和 $\lambda > 0$，以及对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}$，使下列代数 Riccati 不等式方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{X}(\lambda^{-2}\overline{\boldsymbol{E}}\,\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} - \\ \epsilon^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X} + \lambda^2\overline{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} < 0\end{aligned} \tag{8.89}$$

成立，那么存在无记忆状态反馈器(8.87)，使闭环系统(8.86) 和(8.87) 同时满足性能指标(1) 和(2)。并且在这种情况下

$$\boldsymbol{K} = -\frac{1}{2\epsilon^2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \tag{8.90}$$

其次，讨论 $\boldsymbol{D} \neq 0$ 的情形，假设 $\mathrm{rank}(d) = m$，有如下结论：

定理 8.11 对于给定的 $\gamma > 0$，如果存在常数 $\lambda > 0$，使代数 Riccati 不等式方程

$$\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{X}(\lambda^{-2}\overline{\boldsymbol{E}}\,\overline{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X} + \lambda^2\overline{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} - (\boldsymbol{X}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}) < 0 \tag{8.91}$$

有对称正定解 $\boldsymbol{X}$，那么存在状态反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$，使闭环系统(8.50a)同时满足性能指标(1)和(2)。在这种情况下

$$\boldsymbol{K} = -(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}) \tag{8.92}$$

注记 8.6 定理 8.10 和定理 8.11 分别与上一节的定理 8.6 和定理 8.7 完全相似，因此仿照上一节这两个定理的证明，并应用本节的定理 8.7，不难证明本节这两个定理。

本节通过构造一个二次李亚普诺夫泛函，给出了时滞区间系统鲁棒稳定的充分条件，并研究了时滞区间系统鲁棒镇定和干扰抑制问题，得到的结果均为解不同的代数 Riccati 不等式(等式)方程的对称正定解。

8.4 时变区间系统的有关结果

这一节我们将本章前面的有关结果推广到时变区间系统的情形。由于所用的思想和方法与前面基本相同，因此本节在描述清楚问题之后，不加证明地给出有关的结果。

在本节中将使用下面三个记号。用 $\mathrm{PC}_{t_0}^0$($\mathrm{PC}_{t_0}^1$) 记在区间$[t_0, +\infty)$上一致有界的分片连续(分片连续可微)的矩阵值函数集合；用 $L_{t_0}^2$ 记在区间$[t_0, +\infty)$上即平方可积的向量值函数集合。

8.4.1 鲁棒稳定性分析

考虑下述方程描述的时变区间系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{8.93}$$

这里 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 是状态向量，$\boldsymbol{A}(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^0$是系统矩阵，它的元素不

能精确地知道,但是 $\boldsymbol{A}(t) \in N[\boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{Q}(t)]$,其中 $\boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{Q}(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^0$ 是确定的矩阵。

定义 8.5 如果对于集合 $N[\boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{Q}(t)]$ 中的任意矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$,系统(8.93) 都是渐近稳定的,那么称系统(8.93) 为鲁棒稳定的。

与前面的记号类似,我们记

$$\boldsymbol{A}_0(t) = \frac{\boldsymbol{P}(t) + \boldsymbol{Q}(t)}{2}, \boldsymbol{H}(t) = \frac{\boldsymbol{Q}(t) - \boldsymbol{P}(t)}{2} \quad (8.94)$$

显然,$\boldsymbol{H}(t)$ 的元素是非负的,并且 $\boldsymbol{A}_0(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^0, \boldsymbol{H}(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^0$,进一步记

$$\boldsymbol{E}(t) = [\sqrt{h_{11}(t)}\boldsymbol{e}_1 \cdots \sqrt{h_{1n}(t)}\boldsymbol{e}_1 \cdots \sqrt{h_{n1}(t)}\boldsymbol{e}_n \cdots \sqrt{h_{nn}(t)}\boldsymbol{e}_n] \quad (8.95)$$

$$\boldsymbol{F}(t) = [\sqrt{h_{11}(t)}\boldsymbol{e}_1 \cdots \sqrt{h_{1n}(t)}\boldsymbol{e}_n \cdots \sqrt{h_{n1}(t)}\boldsymbol{e}_1 \cdots \sqrt{h_{nn}(t)}\boldsymbol{e}_n]^{\mathrm{T}} \quad (8.96)$$

那么系统(8.93) 等价于下列系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_0(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{E}(t)\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \quad (8.97)$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}^*$,与本章 8.3 节的意义相同。

与引理 8.1 类似,我们有:

引理 8.2 给定两个列向量值函数 $\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}(t) \in R^{n^2} \cap \mathrm{PC}_{t_0}^0$,那么对于 $\boldsymbol{\Sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}^*$,存在正的标量函数 $\lambda(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^0$,使得

$$2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{v} \leqslant \frac{1}{\lambda(t)}\boldsymbol{u}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(t) + \lambda(t)\boldsymbol{v}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}(t) \quad (8.98)$$

成立。

利用引理 8.2 和李亚普诺夫稳定性定理,仿照定理 8.3 的证明过程,我们不难得到如下结论:

定理 8.12 时变区间矩阵系统(8.93) 是鲁棒稳定的,如果下

列两个条件之一成立：

(1) 存在 $t_0 \geqslant 0$，正的标量函数 $\lambda(t) \in PC_{t_0}^0$，以及一致正定的矩阵函数 $\boldsymbol{X}(t) \in PC_{t_0}^1$ 满足下列 Riccati 微分不等式方程

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) + \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{A}_0(t) + \boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}(t) + \frac{1}{\lambda(t)}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{E}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}(t) + \lambda(t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t) < 0 \tag{8.99}$$

(2) 存在 $t_0 \geqslant 0, \varepsilon > 0$，正的标量函数 $\lambda(t) \in PC_{t_0}^0$ 使得下列 Riccati 微分方程

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) + \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{A}_0(t) + \boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}(t) + \frac{1}{\lambda(t)}\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{E}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}(t) + \lambda(t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t) + \varepsilon\boldsymbol{I} = 0 \tag{8.100}$$

则存在惟一的一致正定的矩阵 $\boldsymbol{X}(t) \in PC_{t_0}^1$。

8.4.2 鲁棒镇定

本小节考虑时变区间控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{8.101}$$

这里 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 是状态向量，$\boldsymbol{u} \in R^p$ 为控制输入向量，$\boldsymbol{A}(t) \in PC_{t_0}^0$ 是系统矩阵，它的元素不能精确地知道，但是 $\boldsymbol{A}(t) \in N[\boldsymbol{P}(t), \boldsymbol{Q}(t)]$，其中 $\boldsymbol{P}(t), \boldsymbol{Q}(t)$ 是确定的矩阵，$\boldsymbol{B}(t) \in PC_{t_0}^0$ 为适当维数的矩阵，下面将分两种情况给出结果。本小节中出现的符号与上一小节同样符号的意义相同。

定义 8.6　如果存在线性状态反馈控制器

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{8.102}$$

使由式(8.101)和式(8.102)构成的闭环区间系统是鲁棒稳定的，则称控制器(8.102)为镇定区间系统(8.101)分两种情况加以讨

论:

(1) $\boldsymbol{B}(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^0$为确定的矩阵,我们给出如下结论:

定理8.13 时变区间系统是可通过反馈控制器(8.102)鲁棒镇定的,如果存在 $t_0 \geqslant 0$,和两个正的标量函数 $\lambda(t),\mu(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^0$,以及一致正定的矩阵函数 $\boldsymbol{X}(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^1$,下列满足 Riccati 微分不等式方程

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) + \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{A}_0(t) + \boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{X}(t)\left[\frac{1}{\lambda(t)}\boldsymbol{E}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(t) - \frac{1}{\mu(t)}\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\right]\boldsymbol{X}(t) + \lambda(t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t) < 0 \tag{8.103}$$

或者存在 $t_0 \geqslant 0, \varepsilon > 0$,以及两个正的标量函数 $\lambda(t),\mu(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^0$,使得下列 Riccati 微分方程

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) + \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{A}_0(t) + \boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{X}(t)\left[\frac{1}{\lambda(t)}\boldsymbol{E}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(t) - \frac{1}{\mu(t)}\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\right]\boldsymbol{X}(t) + \lambda(t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t) + \varepsilon\boldsymbol{I} = 0 \tag{8.104}$$

存在惟一的一致正定的矩阵 $\boldsymbol{X}(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^1$。并且在这两种情况下,反馈控制律为

$$\boldsymbol{u}(t) = -\frac{1}{2\mu(t)}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{8.105}$$

(2) 考虑 $\boldsymbol{B}(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^0$适当维数的区间矩阵,即 $\boldsymbol{B}(t) \in N[\boldsymbol{S}(t),\boldsymbol{T}(t)]$,其中 $\boldsymbol{S}(t),\boldsymbol{T}(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^0$是确定的矩阵。令

$$\boldsymbol{B}_0(t) = \frac{\boldsymbol{S}(t) + \boldsymbol{T}(t)}{2}, \boldsymbol{G}(t) = \frac{\boldsymbol{T}(t) - \boldsymbol{S}(t)}{2} \tag{8.106}$$

显然,$\boldsymbol{G}(t)$ 的元素是非负的,并且 $\boldsymbol{B}_0(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^0$, $\boldsymbol{G}(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^0$,进一步记

$$E_B(t) = [\sqrt{g_{11}(t)}e_1 \quad \cdots \quad \sqrt{g_{1p}(t)}e_1 \quad \cdots \\ \sqrt{g_{n1}(t)}e_n \quad \cdots \quad \sqrt{g_{np}(t)}e_n] \tag{8.107}$$

$$F_B(t) = [\sqrt{g_{11}(t)}f_1 \quad \cdots \quad \sqrt{g_{1p}(t)}f_p \quad \cdots \\ \sqrt{g_{n1}(t)}f_1 \quad \cdots \quad \sqrt{g_{np}(t)}f_p]^{\mathrm{T}} \tag{8.108}$$

定理8.14 假设$F_B(t)(t \in [t_0, +\infty))$是列满秩的，那么时变区间系统是可通过反馈控制器(8.102)鲁棒镇定的，如果存在$t_0 \geqslant 0$，以及一致正定的矩阵函数$X(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^1$，下列满足Riccati微分不等式方程

$$\dot{X}(t) + X(t)A_0(t) + A_0^{\mathrm{T}}(t)X(t) + \\ X(t)[X(E(t)E^{\mathrm{T}}(t) + E_B(t)E_B^{\mathrm{T}}(t) - \\ B_0(t)(F_B^{\mathrm{T}}(t)F_B(t))^{-1}B_0^{\mathrm{T}}(t))]X(t) + F^{\mathrm{T}}(t)F(t) < 0 \tag{8.109}$$

或者存在$t_0 \geqslant 0, \varepsilon > 0$，使得下列Riccati微分方程

$$\dot{X}(t) + X(t)A_0(t) + A_0^{\mathrm{T}}(t)X(t) + \\ X(t)[X(E(t)E^{\mathrm{T}}(t) + E_B(t)E_B^{\mathrm{T}}(t) - \\ B_0(t)(F_B^{\mathrm{T}}(t)F_B(t))^{-1}B_0^{\mathrm{T}}(t))]X(t) + F^{\mathrm{T}}(t)F(t) + \varepsilon I = 0 \tag{8.110}$$

存在惟一的一致正定的矩阵$X(t) \in \mathrm{PC}_{t_0}^1$。并且在这两种情况下，反馈控制器为

$$K(t) = -(F_B^{\mathrm{T}}(t)F_B(t))^{-1}B_0(t)X(t) \tag{8.111}$$

8.4.3 干扰抑制问题

考虑有外部干扰的区间控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{B}_1(t)\boldsymbol{w}(t),\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{8.112a}$$

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{8.112b}$$

这里，$\boldsymbol{x}\in R^n$ 为状态向量，$\boldsymbol{u}\in R^m$ 为控制向量，$\boldsymbol{z}\in R^q$ 为评价信号，$\boldsymbol{w}\in R^p$ 为平方可积的外部干扰信号，$\boldsymbol{B}(t)$，$\boldsymbol{C}(t)$，$\boldsymbol{D}(t)$，$\boldsymbol{B}_1(t)$ 为适当维数的确定矩阵，$\boldsymbol{A}(t)\in \mathrm{PC}_{t_0}^0$ 是系统矩阵，它的元素不能精确地知道，但是 $\boldsymbol{A}(t)\in N[\boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{Q}(t)]$。本小节中出现的符号与上一小节同样符号的意义相同。假设对于任意给定的 $T>t_0$，$\boldsymbol{w}(t)$ 满足如下有界条件：

$$\int_{t_0}^{T}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)\mathrm{d}t<+\infty \tag{8.113}$$

这个限制的物理意义为干扰信号的能量是有限的。

对于上述被控对象，本节讨论如何设计状态反馈控制器

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{8.114}$$

使其满足如下性能指标：

(P1) 当 $\boldsymbol{w}(t)=0$ 时，闭环系统是鲁棒稳定的。

(P2) 当初始状态为 $\boldsymbol{x}(t_0)=0$ 时，对于任意给定的 $T>t_0$，有下式成立：

$$\int_{t_0}^{T}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)\mathrm{d}t<\gamma\int_{t_0}^{T}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)\mathrm{d}t \tag{8.115}$$

其中 $\gamma>0$ 为给定的常数，表示干扰对评价信号的影响程度。

对于式(8.112b)中 $\boldsymbol{D}=0$ 的情形，有如下结论：

定理 8.15 对于给定的 $\gamma>0$，如果存在 $t_0\geqslant 0$，两个正的标量函数 $\lambda(t)$，$\mu(t)\in \mathrm{PC}_{t_0}^0$，以及一致正定的矩阵函数 $\boldsymbol{X}(t)\in \mathrm{PC}_{t_0}^1$，下列满足 Riccati 微分不等式方程

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)+\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{A}_0(t)+\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}(t)+$$

$$X(t)\Big[\frac{1}{\lambda(t)}E(t)E^{\mathrm{T}}(t)+\frac{1}{\gamma^2}B_1(t)B_1^{\mathrm{T}}(t)-$$

$$\frac{1}{\mu(t)}B(t)B^{\mathrm{T}}(t)\Big]X(t)+$$

$$\lambda(t)F^{\mathrm{T}}(t)F(t)+C^{\mathrm{T}}(t)C(t)<0 \qquad (8.116)$$

那么存在状态反馈阵 $K(t)$,使闭环系统(8.112) 和(8.114) 同时满足性能指标(1) 和(2)。并且在这种情况下

$$u(t)=-\frac{1}{2\mu(t)}B^{\mathrm{T}}(t)X(t)x(t) \qquad (8.117)$$

对于 $D\neq 0$ 的情形,假设 $\mathrm{rank}(d)=m$,我们给出如下结论:

定理8.16 对于给定的 $\gamma>0$,如果存在 $t_0\geqslant 0$, 两个正的标量函数 $\lambda(t),\mu(t)\in \mathrm{PC}_{t_0}^0$, 以及一致正定的矩阵函数 $X(t)\in \mathrm{PC}_{t_0}^1$, 下列满足 Riccati 微分不等式方程

$$\dot{X}(t)+X(t)A_0(t)+A_0^{\mathrm{T}}(t)X(t)+$$

$$X(t)\Big[\frac{1}{\lambda(t)}E(t)E^{\mathrm{T}}(t)+\frac{1}{\gamma^2}B_1(t)B_1^{\mathrm{T}}(t)\Big]X(t)+$$

$$\lambda(t)F^{\mathrm{T}}(t)F(t)+C^{\mathrm{T}}(t)C(t)(X(t)B(t)+$$

$$C^{\mathrm{T}}(t)D(t))(D^{\mathrm{T}}(t)D(t))^{-1}(B^{\mathrm{T}}(t)X(t)+D^{\mathrm{T}}(t)C(t))<0 \qquad (8.118)$$

那么存在状态反馈阵 $K(t)$,使闭环系统(8.112) 和(8.114) 同时满足性能指标(I) 和(II)。并且在这种情况下

$$K(t)=-(D^{\mathrm{T}}(t)D(t))^{-1}(B^{\mathrm{T}}(t)X(t)+D^{\mathrm{T}}(t)C(t)) \qquad (8.119)$$

8.5 应　　用

8.5.1 飞机运动的区间模型

我们知道,飞机运动系统在给定的飞行高度和马赫数下经过

一系列的假设和处理办法，可得到数学模型为一线性系统，即

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{8.120}$$

对于飞机的纵向运动系统，状态向量 $\boldsymbol{x} = [v_0 \quad \alpha \quad \vartheta \quad \omega_z]^{\mathrm{T}}$，$v_0$ 为飞行速度，α 为攻角，ϑ 为俯仰角，ω_z 为俯仰角速度；控制向量 $\boldsymbol{u} = [\delta_p \quad \delta_e]^{\mathrm{T}}$，$\delta_p$ 油门开度，δ_e 为升降舵偏角。

但是当飞行高度和马赫数与标称的飞行高度和马赫数的差距较大时，将会给数学模型带来一定的误差，这样应该考虑由模型误差引起的不确定性。因此在飞机运动系统(8.120) 中系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和控制矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是不确定的矩阵。在线性系统(8.120) 中，关于状态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 常考虑的不确定性有二种：

(1) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \sum_{i=1}^{q} k_i \boldsymbol{A}_i$，其中 $\boldsymbol{A}_0$ 为标称矩阵，$\boldsymbol{A}_i(i = 1,\cdots,q)$ 为确定的结构矩阵，$k_i(i = 1,\cdots,q)$ 为不确定性参数；

(2) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{E\Sigma F}$，其中 $\boldsymbol{A}_0$ 为标称矩阵，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$ 为适当维数的定常矩阵，$\boldsymbol{\Sigma}$ 为适当维数的不确定矩阵，但 $\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma} \leqslant \boldsymbol{I}$；

(3) $\boldsymbol{A}$ 为一区间矩阵，即 $\boldsymbol{A}$ 的元素不能完全确定，仅知道它的元素属于一些特定的区间。

对于控制矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不确定性也有类似的分类。

显然一般情况下，飞机运动系统中的不确定性矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不属于前两种不确定性，也就是说，飞机运动系统可以看作是区间系统。

综上所述，飞机在阵风干扰下的纵向运动模型可描述为区间控制系统

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{w} \tag{8.121}$$

这里 $\boldsymbol{A} \in N[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]$，最简单的区间控制系统中 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}_1$ 均为确定矩阵，像在 8.2 节中一样，令

$$\boldsymbol{A}_0 = \frac{\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}}{2}, \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}}{2}$$

同时考虑到时滞和模型不确定性，飞机运动系统的模型应是一个如下的时滞区间系统：

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-\tau) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{8.122}$$

这里 $\boldsymbol{A} \in N[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]$，$\boldsymbol{A}_d \in N[\boldsymbol{P}_d,\boldsymbol{Q}_d]$。最简单的区间控制系统中 $\boldsymbol{B}$ 为确定矩阵。在研究区间系统时，令

$$\boldsymbol{A}_{d0} = \frac{\boldsymbol{P}_d + \boldsymbol{Q}_d}{2},\boldsymbol{H}_d = \frac{\boldsymbol{Q}_d - \boldsymbol{P}_d}{2}$$

8.5.2 鲁棒控制

1. 区间系统模型实例

国产某型飞机在阵风干扰下的纵向运动模型可描述为区间控制系统(8.121)，其中状态向量 $x = [v_0 \quad \alpha \quad \vartheta \quad \omega_z]^{\mathrm{T}}$，$v_0$ 为飞行速度，α 为气流迎角，ϑ 为俯仰角，ω_z 为俯仰角速度；控制向量 $\boldsymbol{u} = [\delta_p \quad \delta_e]^{\mathrm{T}}$，$\delta_p$ 为油门开度，δ_e 为升降舵偏角。

为了方便地说明第 4 章中有关定理的应用，我们考虑最简单的区间控制系统，即假设状态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为区间矩阵，而 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{B}_1$ 均为确定矩阵，有关描述区间控制系统的矩阵 $\boldsymbol{A}_0$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}_1$ 分别为

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_0 &= \begin{bmatrix} -0.08 & -0.03 & -0.157 & 0 \\ -0.73 & -0.377 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8.65 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.05 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{H} &= \begin{bmatrix} 0.05 & 0.02 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} 1.54 & -0.02 \\ -0.1 & -0.056 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.5 \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{8.123}$$

对于上述飞机运动系统设计状态反馈控制器

$$u(t) = Kx(t) \tag{8.124}$$

使得闭环区间系统满足：

(1) 鲁棒稳定性能。对系统矩阵的参数在矩阵区间$[A_0 - H, A_0 + H]$内的不确定性摄动，闭环系统都是渐近稳定的。

(2) 干扰抑制性能。对任意给定的 $T > 0$

$$\int_0^T x^T S x \mathrm{d}t \leqslant \gamma^2 \int_0^T w^T w \mathrm{d}t, \forall w, x(0) = 0$$

对矩阵区间$[A_0 - H, A_0 + H]$内的任意系统均成立，这里取 $\gamma = 0.25$。

为了研究干扰对气流迎角和俯仰角的影响，在这里我们取权矩阵为对角阵

$$S = \mathrm{diag}[0 \quad 1 \quad 0.5^2 \quad 0]$$

因此可以取评价信号为

$$z(t) = Cx(t) \tag{8.125}$$

而这里矩阵 C 为

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

应用定理 8.5，将上述数据代入不等式方程(8.53)，并取 $\varepsilon^2 = 0.01, \gamma^2 = 0.0625, \lambda^2 = 1.0$，可得对称正定解为

$$X = \begin{bmatrix} 0.0478 & 0.0012 & -0.0015 & -0.0001 \\ 0.0012 & 3.1120 & -1.4706 & 0.0150 \\ -0.0015 & -1.4706 & 1.5746 & 0.0150 \\ -0.0001 & 0.0150 & 0.0150 & 0.0090 \end{bmatrix}$$

根据上述解，由式(8.54)可得满足要求的控制器为

$$K = \begin{bmatrix} -0.5884 & 2.4748 & -1.1578 & 0.0135 \\ 0.0017 & 2.1737 & 0.1217 & 0.4749 \end{bmatrix}$$

而标称系统的闭环特征值分别为

$$\lambda_{1,2} = -2.0513 \pm j4.6758, \lambda_{3,4} = -0.6082 \pm j0.9804$$

在本应用中,从矩阵 $\boldsymbol{H}$ 看出飞机运动系统中可以摄动的参数均超过了 50%,这说明书中介绍的方法是实用的和有效的。

2. 时滞区间系统模型实例

国产某型飞机在高度约为 11km,马赫数约为 0.9 的速度作定常水平直线飞行时的纵向运动模型为滞后区间系统(8.122),其中状态向量 $x = [\nu \quad \alpha \quad \vartheta \quad \omega_z]$, ν 为飞行速度,α 为气流仰角,ϑ 为俯仰角,ω_z 为俯仰角速度。矩阵 $\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{A}_{d0}, \boldsymbol{H}_d$ 分别为

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_0 &= \begin{bmatrix} -0.0166 & -0.0057 & -0.0369 & 0 \\ -0.105 & -0.585 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.898 & -1.977 & 0 & -0.627 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{A}_{d0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6.25 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{H} &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0.003 & 0.03 & 0 \\ 0.05 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{H}_d &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{8.126}$$

应用定理8.7,将上述数据代入不等式方程(8.69),并取 $\lambda = \lambda_d = \lambda_{d0} = 1.0$,可得对称正定解为

$$X = \begin{bmatrix} 3.0471 & 0.0055 & -0.1644 & -0.1605 \\ 0.0055 & 3.4871 & -0.0365 & 0.5454 \\ -0.1644 & -0.0365 & 0.0740 & 0.0147 \\ -0.1605 & 0.5454 & 0.0147 & 0.3708 \end{bmatrix}$$

所以，飞机运动系统(8.122)、(8.126)是时滞独立渐近稳定的。在本应用中，从矩阵 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{H}_d$ 可看出飞机运动系统中可以摄动的参数均超过了50%，这说明书中介绍的方法是实用的和有效的。

第2篇　μ控制理论

第9章　μ理论的基本概念

9.1　引　　言

在研究鲁棒多变量控制的过程中，先后出现了参数空间法、Kharitonov型法、状态空间法、H_∞方法以及μ方法。其中以H_∞方法在工程中应用最多，它以输出灵敏度函数的H_∞范数作为性能指标，旨在可能发生“最坏扰动”的情况下，使系统的误差在无穷范数意义下达到极小，从而将干扰问题转化为求解使闭环系统稳定，并使相应的H_∞范数指标极小化的输出反馈控制器问题[1]。然而从实践中可知，H_∞设计方法虽然将鲁棒性直接反映在系统的设计指标中，不确定性反映在相应的加权函数上，但它“最坏情况”下的控制却导致了不必要的保守性；另外H_∞优化控制方法仅仅针对鲁棒稳定性而言，忽略了对鲁棒性能的要求。导致保守性和忽略鲁棒性能设计的原因主要在于H_∞设计方法是以非结构化不确定性和小增益定理为设计框架的。因此鲁棒多变量反馈系统设计方法一直存在的困难，是不能够在统一框架下同时处理性能指标与鲁棒稳定性的折中问题。与H_∞同时期发展的μ理论[2]则考虑到了结构化的不确定性问题，它不但能有效地、无保守性地判断“最坏情况”下摄动的影响，而且当存在不同表达形式的结构化不确定性情况下，能分析控制系统的鲁棒稳定性和鲁棒性能问题[3]。从工程的角度来看，在精确描述模型参数的不确定性和设

计具有鲁棒作用的控制系统方面投人大量精力是一件很有理论和实际意义的事情，因为任何一个在指定范围内的不确定性参数引起的性能下降，控制系统都能起到调节的作用。

对 μ 理论的发展产生重要影响的是20世纪70年代末鲁棒多变量控制系统的研究[4~8]，它们对稳定性分析的早期工作，特别是小增益理论和圆盘理论产生了不可估量的影响。这些理论给出了反馈中非线性环节稳定性的充分条件。早期鲁棒性的研究将重点放在了小增益型的条件上，它包括一类以1范数为边界的、非约束摄动的线性系统稳定性的充要条件。20世纪80年代初，Dolye和Stein以奇异值为鲁棒性度量工具推广了多变量系统的Bode幅值设计方法，他们指出影响系统鲁棒性的是系统回差矩阵或逆回差矩阵的奇异值[39]。然而在越来越多的实践中表明，基于奇异值的方法使非结构化不确定性的假设太粗略，对鲁棒性能的问题不能得到充分解决；对于结构化的对象扰动，基于奇异值的稳定性和品质测度通常是很保守的。在1982年IEE Proceedings出版的关于灵敏度和鲁棒性的专辑中，Dolye引进了结构奇异值的概念来减少这种方法的保守性，逐渐形成了 μ 理论[2]。

在 μ 理论的不断发展和完善的过程中，研究人员做了大量的理论和实际应用工作。

在研究不确定性参数的性质方面，从实参数情形到复参数情形，到归纳为混合参数不确定的问题。它们有各自的特点，比如对于实参数 μ 理论问题，它会产生数据的不连续性问题[9]，这便增加了计算的复杂性，对于用实参数 μ 作为鲁棒性测量手段的实用性投下了令人忧虑的阴影。Packard和Pandey（1991年）指出，如果在较为缓和的假设下混合 μ 理论问题（包含复不确定时）中数据则是连续的[10]。这就使工程问题的实现和解决得到了保证，因为工程人员总是对鲁棒性能问题（至少包括一个复数块）或者未建模动态的稳定性问题（当然要包括一个不确定性块）感兴趣。这样在工程上混合 μ 的不连续问题则不会产生。Rohn和Poljak（1992年）的研究结果有力地证明了在纯实数或复数情况下一味

追求计算 μ 的精确方法是毫无意义的。Young（1992 年）也指出只有将所有技术智能地结合在一起，才能得到实际有效的算法。

在算法方面，研究人员做了不懈的努力。由于 μ- 综合用了一种更程式化的方法，而不是经典控制中的 trial-and-error 方法，所以它对性能最大化和不确定性之间的折中可以起到调节作用。与 H_∞ 优化相比，μ- 综合没有解析解，只有通过数字算法（D-K 迭代[13]）来实现。尽管在理论上还未证明其收敛性，但在工程应用上已收到很好的效果。考虑到 D-K 迭代法不能保证收敛到全局最小，于是一种改进方法 μ-K 迭代法[14] 被提了出来。类似 D-K 迭代法，它仍然不能完全保证收敛到全局最小，但如果 μ-K 迭代没有给出最小值，它还可以通过用 D 矩阵尺度化 M 得到较好的结果。

另外，在改进 μ 上下界的问题上，Fan（1991 年）给出复数 μ 上界实际是最小化一个 Hermitian 矩阵的特征值问题[15]。Young 和 Dolye（1990 年）认为混合参数 μ 理论问题可以看作是实特征值的最大化问题，通过一个能量算法来解决[16]。

μ 理论在理论方面不断完善的同时，工程人员积极把它运用到实践中，诸如在航天火箭推力控制、飞机飞行稳定性和性能控制、化工控制等等。比如，Dale F. Enns（1991 年）用结构奇异值的方法得到了火箭上升穿越大气层时保持其稳定的控制规律。由俯仰角速率陀螺感知飞行器内不稳定的俯仰运动，运用这种控制律，通过调节推力作用，使飞行器稳定地飞行。通过与古典控制方法的比较，说明在解决有结构化模型不确定的情况下，对线性系统进行控制律设计 μ- 综合方法是一个很好的方法[17]。M. steinbuch（1992 年）分析了当系统同时存在复数和实数不确定性时，不确定性的建模和计算稳定边界的鲁棒性问题，并将此运用到电机定位装置上，他用 μ 方法分析了在运行条件范围内的稳定性问题[18]。Eicher Low（1992 年）等结合 μ- 综合方法和特征结构配置方法，分析了直升机飞行控制系统的鲁棒性问题。这种方法克服了古典控制方法中由于飞行系统参数的变化而导致操作品质的下降，以及不能评价鲁棒性能的缺点。更重要的是这种新方法避免了由于

用非结构化奇异值进行测试所导致的不必要的保守性。测试结果表明，尽管某些参数的变化会影响直升机的稳定性，但是这种新的设计方法使操作品质仍然不低于 2 级[19]。

结构奇异值 (Structured Singular Valuc，简称 SSV) 实际上是一种线性代数工具，它主要用来研究多变量系统的鲁棒反馈控制中常常出现的一类特殊的摄动矩阵问题。这类摄动称为线性分式化 (Linear Fractional)，是线性系统中各种不确定性的一种非常切合实际的描述方法。用结构奇异值可以定量地表征结构化不确定性对线性动态系统稳定性及性能的影响[23]。

结构奇异值理论将古典单输入单输出(SISO) 系统鲁棒性概念及检验方法推广到多输入多输出(MIMO) 系统。这种新的分析方法使反馈控制系统性能与不确定性影响之间的折中成为可能。

μ 理论的关键思想是：通过输入、输出、传递函数、参数变化、摄动等所有线性关联重构，以隔离所有摄动，得到如图 9.1 所示的块对角有界摄动问题 (BDBP 系统)。

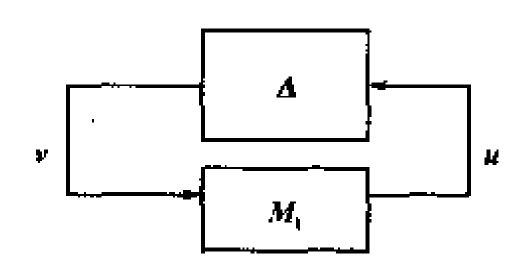


图 9.1　M_1-Δ 结构图

图 9.1 中传递函数矩阵 M 表示广义标称系统。不失一般性，块对角阵集合 $\boldsymbol{\Delta}$ 表示参数和动态不确定性。这里假定所有摄动

$$\boldsymbol{\Delta} \in B\underline{\boldsymbol{\Delta}} \triangleq \{\boldsymbol{\Delta} \in \underline{\boldsymbol{\Delta}} : \bar{\sigma}(\boldsymbol{\Delta}) < 1\}$$

这里 $\bar{\sigma}(\cdot)$ 表示矩阵的最大奇异值。由文献[43] 的小增益定理知：上述 BDBP 系统对于 $\forall \boldsymbol{\Delta} \in B\underline{\boldsymbol{\Delta}}$，其鲁棒稳定的充分条件是

$$\| \boldsymbol{M}(s) \|_{\infty} < 1 \tag{9.1}$$

式(9.1) 奠定了用 H_{∞} 控制解决鲁棒稳定性的基础。类似于把发

生在回路中不同位置的不确定性反映在一个参考位置的处理方法，这类条件依然具有任意的保守性，因为它忽略了已知不确定性 $\boldsymbol{\Delta}$ 的块对角结构，所以基于式 (9.1) 的 H_∞ 优化方法会引入严重的保守性。μ 理论就是在于从理论上消除这种保守性，即寻找 BDBP 系统鲁棒稳定的充要条件。从这一点讲，结构奇异值能够很好地弥补 H_∞ 控制的不足，达到了把性能指标与鲁棒性结合在一起考虑的目的。这也是以往多变量系统设计方法所面临的困难。

与其它线性鲁棒控制理论相比，μ 理论有两方面的优点：

(1) 结构化不确定性可以完全直接地引入到控制器的设计中，无需将它们转化为一类更大范围的不确定性，从而导致了不必要的保守性。

(2) μ 方法还可以对鲁棒性能进行分析和综合，不像 H_∞ 优化方法只能进行鲁棒稳定性的分析和设计控制器。

这些优点在下面的详细讨论中将会看到。

9.2 结构奇异值

9.2.1 μ 的定义

如前所述，一个实际对象可以看作对象模型集合 G 中的一个元素。结构化不确定性摄动 $\boldsymbol{\Delta}$ 描述了系统对象与标称模型的偏离程度。这个摄动可由不同性质的不确定性源构成。对于系统中不同位置出现的同类不确定性，可以将它们"连接"起来，用重复摄动块(repeated perturbation)来描述。

例如，对于非建模动态的不确定性可用一个有任意范数边界的复传递矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_i$ 来表示，且满足 $\bar{\sigma}(\boldsymbol{\Delta}_i)\leqslant 1$[2]，则实际对象可用如下的集合 G 来表示：

$$G = \{\boldsymbol{G}:\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}_0 + \boldsymbol{W}_{ui}\boldsymbol{\Delta}_i, \boldsymbol{\Delta}_i \in RH_\infty, \text{且}\ \bar{\sigma}(\boldsymbol{\Delta}_i)\leqslant 1\} \tag{9.2}$$

对于参数化不确定性则用实标量摄动 $\boldsymbol{\Delta}_i$(且 $|\boldsymbol{\Delta}_i|\leqslant 1$) (scalar real perturbation) 来表示。

为了评价闭环系统的稳定性和性能，总是有可能将含有不确定性系统分隔成两部分：不确定性 $\boldsymbol{\Delta}$ 和广义标称对象 $\boldsymbol{M}(s)$，得到图 9.2 所示的 $\boldsymbol{M}$-$\boldsymbol{\Delta}$ 结构。这种结构是所有容许系统集合的标准描述 (Morari 和 Zafirion，1989 年)[20]。

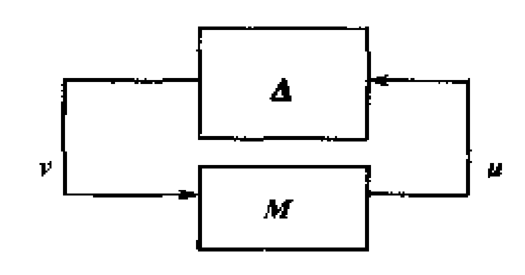


图 9.2　$\boldsymbol{M}$-$\boldsymbol{\Delta}$ 标准结构

图 9.2 中传递函数矩阵 $\boldsymbol{M}\in C^{n\times n}$，包括对象的标称模型、控制器和不确定性的加权函数。摄动块 $\boldsymbol{\Delta}$ 是一个块对角矩阵，它仅仅包含各种类型的不确定性摄动。图 9.2 还反映了系统的摄动 $\boldsymbol{\Delta}$ 是如何与有限维的线性定常系统 $\boldsymbol{M}$ 相互联系的。标称系统 $\boldsymbol{M}$ 的输入 $\boldsymbol{v}$ 包括所有外部输入信号，即需要跟踪的参考指令信号、扰动及传感器噪声和反馈控制输入。$\boldsymbol{M}$ 的输出 $\boldsymbol{u}$ 包括所有需要满足稳定性和性能指标的受控对象输出和反馈到控制器的传感器信号。$\boldsymbol{\Delta}$ 结构是根据实际问题的不确定性和系统所要求的性能指标来确定的，它属于矩阵集合 $\underline{\boldsymbol{\Delta}}(s)$。这个集合描述了包含下面三个部分的块对角结构：

(1) 摄动块的个数；

(2) 每个摄动子块的类型；

(3) 每个摄动子块的维数。

在这里，我们考虑两类摄动块——重复标量摄动块 (repeated scalar) 和不确定性全块 (full blocks)。前者表示了对象的参数不确定性，后者表示了对象的动态不确定性。

令非负整数 S 和 F 分别表示重复标量摄动块和不确定性全块的个数，正整数 $r_1,\cdots,r_S$；$m_1,\cdots,m_F$ 为这些摄动块的维数，并且

有第 i 个重复标量摄动块的维数为$r_i \times r_i$,第 j 个全块的维数为$m_j \times m_j$。

定义 9.1 块结构 $\underline{\boldsymbol{\Delta}}$ 可定义为

$$\underline{\boldsymbol{\Delta}} = \{\mathrm{diag}[\delta_1 \boldsymbol{I}_{r_1}, \cdots, \delta_S \boldsymbol{I}_{r_S}, \boldsymbol{\Delta}_1, \cdots, \boldsymbol{\Delta}_F] : \delta_i \in C, \boldsymbol{\Delta}_j \in C^{m_j \times m_j},$$

$$1 \leqslant i \leqslant S, 1 \leqslant j \leqslant F\} \tag{9.3}$$

且有 $\underline{\boldsymbol{\Delta}} \subset C^{n \times n}$。

为了保持维数的一致性,必须满足$\sum_{i=1}^{S} r_i + \sum_{j=1}^{F} m_j = n$。通常还需要定义 $\boldsymbol{\Delta}$ 的范数边界子集$B\underline{\boldsymbol{\Delta}}$,即

$$B\underline{\boldsymbol{\Delta}} = \{\boldsymbol{\Delta} \in \underline{\boldsymbol{\Delta}} : \bar{\sigma}(\boldsymbol{\Delta}) \leqslant 1\} \tag{9.4}$$

则 μ 的定义可陈述如下:

定义 9.2 对于 $\boldsymbol{M} \in C^{n \times n}$,$\mu_{\underline{\boldsymbol{\Delta}}}(\boldsymbol{M})$ 定义为

$$\mu_{\underline{\boldsymbol{\Delta}}}(\boldsymbol{M}) = \begin{cases} \left(\min\limits_{\boldsymbol{\Delta} \in \underline{\boldsymbol{\Delta}}} \{\bar{\sigma}(\boldsymbol{\Delta}) : \boldsymbol{\Delta} \in \underline{\boldsymbol{\Delta}}, \det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Delta}) = 0\}\right)^{-1} \\ 0 : \text{如果 } \det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Delta}) \neq 0, \forall \boldsymbol{\Delta} \in \underline{\boldsymbol{\Delta}} \end{cases} \tag{9.5}$$

对 μ 的定义有如下说明:

(1) $\mu(\cdot)$ 是矩阵 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{\Delta}$ 的函数。

(2) 结构奇异值 μ 实际上可以解释为使闭环系统不稳定时(即 $\det(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Delta}) = 0$ 时)最小容许摄动的最大奇异值的倒数。所以结构奇异值是结构化不确定性的稳定裕度的原型。

如果从"反馈"的角度来考虑 μ 的物理意义,则更容易理解。已知 $\boldsymbol{M} \in C^{n \times n}$,考虑图 9.1 所示的 $\boldsymbol{M}$-$\boldsymbol{\Delta}$ 结构,它可以用回路方程的形式表达,即

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{u} \end{cases} \Rightarrow (\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{u} = 0$$

当 $\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Delta}$ 非奇异时，回路方程的惟一解为 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}=0$；但如果 $\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Delta}$ 奇异，则该方程有无穷多个解，并且解的范数 $\|\boldsymbol{u}\|$、$\|\boldsymbol{v}\|$ 可以任意大。从系统稳定性的角度来看，这个"反馈系统"是"不稳定"的。因此，$(\mu_{\underline{\Delta}}(\boldsymbol{M}))^{-1}$ 反映了不确定性结构集合中引起上述多输入多输出反馈回路不稳定的最小摄动 $\boldsymbol{\Delta}$ 的大小。换句话说，$(\mu_{\underline{\Delta}}(\boldsymbol{M}))^{-1}$ 是使系统稳定性受到"破坏"的最小 $\boldsymbol{\Delta}\in\underline{\boldsymbol{\Delta}}$ 的大小的量度，而且这个 $\boldsymbol{\Delta}$ 满足条件 $\det(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Delta})=0$。这一点可以从多输入多输出系统的 Nyquist 稳定判据得到。在这个判据中说到 $\det(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Delta})$ 的零点就是反馈系统的闭环极点。因此，如果 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}(s_0)$ 是复平面内在 s_0 处的传递矩阵，则 $(\mu_{\underline{\Delta}}(\boldsymbol{M}))^{-1}$ 就是使一个闭环极点移到 s_0 处的最小容许 $\boldsymbol{\Delta}$ 的大小。类似地，"稳定"这个概念就描述了使回路方程的惟一解恒等于零时的条件。

注：1. 从 μ 的定义可知，对任意 $\alpha\in C$，有 $\mu(\alpha\boldsymbol{M}=|\alpha|\cdot\mu(\boldsymbol{M})$ 成立。

2. 在 μ 的定义中取 μ 而不是 $1/\mu$，是因为 μ 从数学的角度考虑是连续有界的。更重要的是它更易于与线性分式变换联系起来，并推广到谱半径和最大奇异值。

3. 可以看出，μ 函数与 H_∞ 控制理论的联系：H_∞ 范数是 μ 的上界，即对任意稳定的传递函数 $M(s)$ 有

$$\sup_{\omega}\mu(\boldsymbol{M})(\mathrm{j}\omega))\leqslant\|\boldsymbol{M}\|_\infty$$

9.2.2 μ 上下界的确定

显然，由 μ 的定义是很难找到一个有效的方法计算其值的。尽管这样，通过求 μ 的上下界获得 μ 取值区间的方法在工程上却非常有效，且易于处理。它不但简化了计算量，而且只要上下界区间长度足够小，用 μ 的上下界是可以近似代替 μ 值的。

下面我们将看到，如果 $\underline{\Delta}(s)$ 对每个 $s\in C$ 是有界的，则传递函数矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的结构奇异值 $\mu_{\underline{\Delta}}(\boldsymbol{M})$ 可与一些所熟知的线性代数性质相联系(Dolye et al. 1982 年)[2]。

结论 9.1 如果 $\underline{\Delta} = \{\delta I : \delta \in C\}(S = 1, F = 0, r_1 = n)$，则

$$\mu_{\Delta}(\boldsymbol{M}) = \rho(\boldsymbol{M}) \tag{9.6}$$

其中 $\rho(\boldsymbol{M})$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的谱半径。

结论 9.2 如果 $\underline{\Delta} = C^{n\times n}(S = 0, F = 1, m_1 = n)$，则

$$\mu_{\Delta}(\boldsymbol{M}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{M}) \tag{9.7}$$

其中 $\bar{\sigma}(\boldsymbol{M})$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的最大奇异值。

结论 9. 3 对于一般的 $\underline{\boldsymbol{\Delta}}$，有下列不等式成立

$$\{\delta \boldsymbol{I}_n : \delta \in C\} \subset \underline{\Delta} \subset C^{n\times n} \tag{9.8}$$

由 μ 的定义和结论 9.1、结论 9.2，则有下列不等式成立

$$\rho(\boldsymbol{M}) \leqslant \mu_{\Delta}(\boldsymbol{M}) \leqslant \bar{\sigma}(\boldsymbol{M}) \tag{9.9}$$

由于 ρ 和 $\bar{\sigma}$ 之间的间距可以任意大，所以用结论 9.3 中的边界估计 $\mu_{\Delta}(\boldsymbol{M})$ 值还不够准确。下面的结论[25] 给出了如何通过变换 $\boldsymbol{M}$，只影响 ρ 和 $\bar{\sigma}$ 的大小而不影响 $\mu_{\Delta}(\boldsymbol{M})$ 值来精确其边界。首先定义 $C^{n\times n}$ 的两个子集

$$\underline{Q} = \{\boldsymbol{Q} \in \underline{\Delta} : \boldsymbol{Q}^* \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_n\} \tag{9.10}$$

$$\begin{aligned} \underline{D} = \{\mathrm{diag}[\boldsymbol{D}_1, \cdots, \boldsymbol{D}_S, d_1 \boldsymbol{I}_{m_1}, \cdots, \\ d_F \boldsymbol{I}_{m_F}] : \boldsymbol{D}_i \in C^{r_i\times r_i}, \boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{D}_i^* > 0, \\ d_j \in R, d_j > 0\} \end{aligned} \tag{9.11}$$

注意到，对于任意 $\boldsymbol{\Delta} \in \underline{\boldsymbol{\Delta}}, \boldsymbol{Q} \in \underline{Q}, \boldsymbol{D} \in \underline{D}$，有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Q}^* \in \underline{Q}, \boldsymbol{Q\Delta} \in \underline{\Delta}, \boldsymbol{\Delta Q} \in \underline{\Delta} \\ \bar{\sigma}(\boldsymbol{Q\Delta}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\Delta Q}) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\Delta}) \end{aligned}\right\} \tag{9.12}$$

$$D\Delta = \Delta D \tag{9.13}$$

定理 9.1 对于上述定义的 $Q \in \underline{Q}, D \in \underline{D}$,有下式成立

$$\mu_\Delta(MQ) = \mu_\Delta(QM) = \mu_\Delta(M) = \mu_\Delta(DMD^{-1}) \tag{9.14}$$

更进一步，式 (9.9) 中 $\mu_\Delta(M)$ 的边界可以再缩小为

$$\max_{Q \in \underline{Q}} \rho(MQ) = \max_{\Delta \in B\underline{\Delta}} \rho(MQ) = \mu_\Delta(M) \leqslant \inf_{D \in \underline{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \tag{9.15}$$

Dolye 指出式(9.15) 的下界实际上是等式。然而,这里所描述的最大化只是局部最大,而不是全局的。目前还没有一种解析方法能够搜寻到谱半径的全局最优的有效解析方法。但利用最大模定理(maximum-modulustheorem)[25],一种可行的能量算法能够很快地计算出局部最大值。

另外 $\mu_\Delta(M)$ 的上界可以阐述为一个凸优化的问题。下面给出一个简单的凸性性质，它说明函数 $\bar{\sigma}(D^{\frac{1}{2}}MD^{-\frac{1}{2}})$ 有凸级的集合。

性质 9.1 已知 $M \in C^{n\times n}$,尺度集合 $\underline{D}$,$\beta > 0$。则

$$\{D \in \underline{D}: \bar{\sigma}(D^{\frac{1}{2}}MD^{-\frac{1}{2}}) < \beta\} = \{D \in \underline{D}: \lambda_{\max}(M^* DM - \beta^2 D) < 0\} \tag{9.16}$$

且是凸的。

性质 9.1 中第二个条件称为线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequality,简称 LMI),其与 D 的函数相关性比在上界表达中要简单得多,使凸性更为明显。

这种凸优化虽然在理论上可以找到全局最小,然而实际上最小上界并不总等于 μ 值。对于块结构满足 $2S+F \leqslant 3$,最小上界被证明等于 μ;对于块结构满足 $2S+F > 3$,则不能用最小上界来代替 μ[36]。这个结论在表 9.1 中表示了哪种情况下,最小上界可保证等于 μ。

表 9.1 达到 μ 上界的条件

S \ F	0	1	2	3	4
0	—	Y	Y	Y	N
1	Y	Y	N	N	N
2	N	N	N	N	N
注:Y—是;N—否。					

为了有效地使用 μ 理论,估计上下界是很有必要的。另外上界与 H_∞ 控制综合法相结合便得到一个迭代的 μ 综合方法。

9.3 线性分式变换(LFT)与 μ

9.3.1 线性分式变换(LFT)

控制理论的应用很大程度上与一类线性反馈回路问题的关系密不可分,这类线性反馈回路通常取线性分式变换的形式 (Linear Fractional Transformation,简称 LFT)。在本节中将通过一些简单的定理揭示这种关系,同时还讨论一个进行鲁棒性分析的基础——主环定理。

下面动态系统模型(如图 9.3),包括了参数和非参数的不确定性。

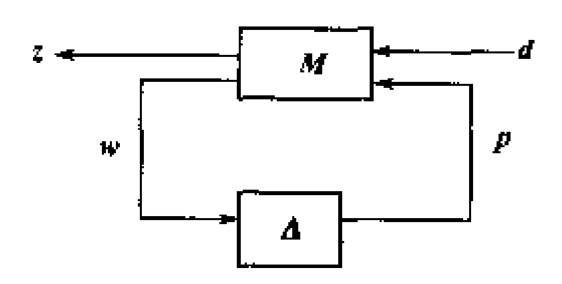


图 9.3 线形分式变换结构

图 9.3 中标称系统矩阵 M 可分块如下:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} \\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22} \end{bmatrix} \tag{9.17}$$

不确定性块结构 $\underline{\Delta}$ 与 $\boldsymbol{M}_{22}$ 的维数相匹配。

对于 $\boldsymbol{\Delta} \in \underline{\Delta}$,回路方程为

$$\left.\begin{aligned} z &= \boldsymbol{M}_{11}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{M}_{12}\boldsymbol{p} \\ w &= \boldsymbol{M}_{21}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{M}_{22}\boldsymbol{p} \\ p &= \boldsymbol{\Delta} w \end{aligned}\right\} \tag{9.18}$$

定义 9.3 已知如前所述的复矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{\Delta}$,当存在惟一向量 $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{p}$,使得对任意外输入向量 $\boldsymbol{d}$,方程组 (9.17) 都满足,则系统是适定的(well-posed)。

换句话说,系统是适定的的充分必要条件是 $\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{M}_{22}\boldsymbol{\Delta}$ 可逆的;否则,回路方程或者无解,或者有无穷多个解。

定义 9.4 如果图 9.2 中的系统是适定的,则由 $\boldsymbol{\Delta} \in \underline{\Delta}$ 引入的关于 $\boldsymbol{M}$ 的线性分式变换(LFT) $F_l(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Delta})$ 可定义为

$$F_l(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Delta}) = \boldsymbol{M}_{11} + \boldsymbol{M}_{12}\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{M}_{22}\boldsymbol{\Delta})^{-1}\boldsymbol{M}_{21} \tag{9.19}$$

并且满足 $\boldsymbol{z} = F_l(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{d}$。

$F_l(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Delta})$ 就称为线性分式变换 (LFT)。这里的下标"l"是指如图 9.2 所示的由 $\boldsymbol{\Delta} \in \underline{\Delta}$ 所闭合 $\boldsymbol{M}$ 的"下回路"。类似地当 $\boldsymbol{z}$ 作输入、$\boldsymbol{d}$ 作输出时,同样可以描述出这样的不确定性矩阵闭合的"上回路" 的 LFT 形式

$$F_u(\boldsymbol{M}, \Delta) = \boldsymbol{M}_{22} + \boldsymbol{M}_{21}\Delta(\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{M}_{11}\Delta)^{-1}\boldsymbol{M}_{012}$$

另外,方程(9.18) 中,子矩阵 $\boldsymbol{M}_{11}$ 代表了标称模型的传递矩阵,如方程(9.4) 定义的 $\Delta \in B\underline{\Delta}$ 可以看作是在一个容许集中的有范数边界的摄动,而子矩阵 $\boldsymbol{M}_{12}$、$\boldsymbol{M}_{21}$、$\boldsymbol{M}_{22}$ 分别给出了参数和非参数不确定性对 $\boldsymbol{M}_{11}$ 影响程度的信息。

在线性系统理论中,LFTs 的一个基本性质是 LFTs 的互联仍然是 LFTs。比如,考虑下面的有三个组成部分的情形(图 9.4)。通过简单的重组,将所有已知的部分集中在一起,将所有的摄动集中在一起,得到图 9.5。其中 $\boldsymbol{P}$ 只与 $\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{G}_3$ 有关。

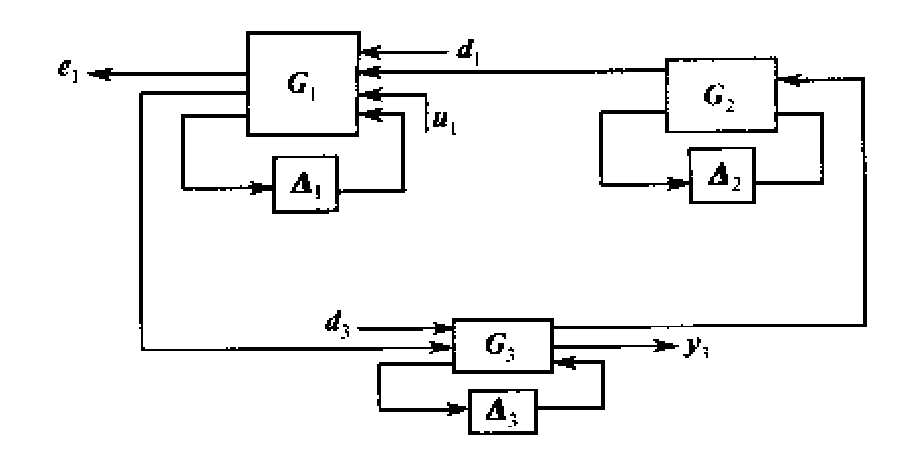


图 9.4　一个 LFTs 互连的例子

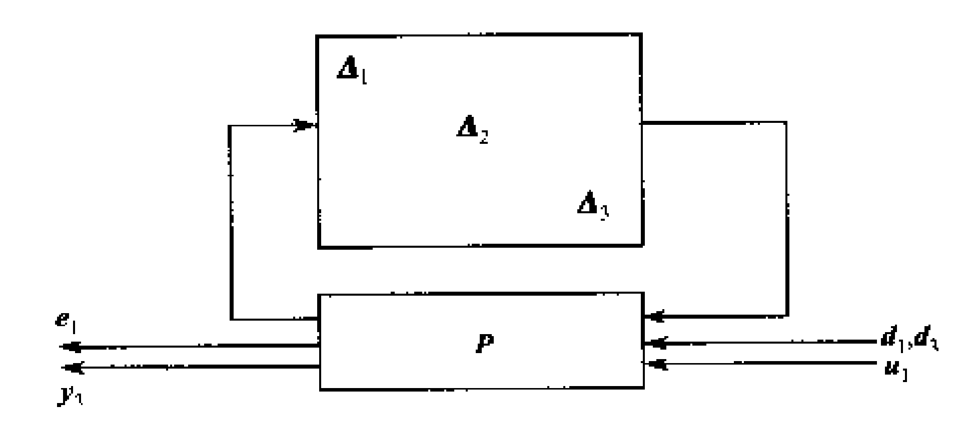


图 9.5　图 9.4 的等价表示

9.3.2　主环定理(Main Loop theorem)

假如已知两个块结构集合 $\underline{\Delta}_1$ 和 $\underline{\Delta}_2$,它们分别与 $\boldsymbol{M}_{11}$、$\boldsymbol{M}_{22}$的维数相匹配,则得到如下块结构集合 $\underline{\tilde{\Delta}}$:

$$\underline{\tilde{\Delta}} = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} : \Delta_1 \in \underline{\Delta}_1, \Delta_2 \in \underline{\Delta}_2 \right\} \tag{9.20}$$

对于上面三个摄动块 $\underline{\tilde{\Delta}}$、$\underline{\Delta}_1$ 和 $\underline{\Delta}_2$,可以计算出相应的 μ 值。通常对下面两个问题是较为感兴趣的。

(1) 判断对于所有 $\boldsymbol{\Delta}_2 \in \underline{\Delta}_2$, 且 $\bar{\sigma}(\boldsymbol{\Delta}_2) \leqslant 1$,LFT 是否适定;

(2) 如果 LFT 是适定的,对有范数边界的摄动集合 $\underline{\boldsymbol{\Delta}}_2$,判断传递函数矩阵 $\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Delta}_2)$ 的标称量测的估值范围,即 $\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Delta}_2)$

能达多“大”。

为了解决上述两个问题，有下面两个重要定理(Packard et al. 1993. Balas et al. 1991 年)。无论是采用状态空间方法、频域法，还是采用李亚普诺夫方法的形式，它们都是线性系统用 μ 理论方法进行鲁棒性分析和综合的基础。

令 $\mu_1(\cdot)$ 是对 $\underline{\boldsymbol{\Delta}}_1$ 的结构奇异值，$\mu_2(\cdot)$ 是对 $\underline{\boldsymbol{\Delta}}_2$ 的结构奇异值。

定理 9.2 线性分式变换 $\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{M},\Delta_2)$ 对所有 $\boldsymbol{\Delta}_2 \in B\underline{\Delta}_2$ 是适定的，当且仅当

$$\mu_2(\boldsymbol{M}_{22}) < 1 \tag{9.21}$$

当摄动 $\boldsymbol{\Delta}_2$ 与 0 有偏差时，则矩阵 $F_l(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Delta}_2)$ 就与 $\boldsymbol{M}_{11}$ 有偏差。$\mu_1(\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Delta}_2))$ 的取值范围则与 $\mu_{\tilde{\Delta}}(\boldsymbol{M})$ 有密切关系。

定理 9.3 (主环定理)

$\mu_{\tilde{\Delta}}(\boldsymbol{M}) < 1$ 成立的充分必要条件是下面两条件成立：

$$\mu_2(\boldsymbol{M}_{22}) < 1;\ \max_{\Delta_2 \in B\Delta_2} \mu_1(\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Delta}_2)) < 1 \tag{9.22}$$

对于主环定理有如下说明：

(1) 这个定理是根据可行性条件来检验某个量是否小于 1 的。

(2) 这个定理的重要性可通过下面的叙述体现出来。

假设矩阵 $\boldsymbol{W}$ 的一个性质 $\boldsymbol{p}$ 与一个 $\boldsymbol{\mu}$ 值的测试有关。也就是说，存在某个块结构 Δ_p 使得

矩阵 $\boldsymbol{W}$ 满足性质 $\quad \boldsymbol{p} \Leftrightarrow \mu_{\Delta_p}(\boldsymbol{W}) < 1$

于是被摄动的矩阵 $\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Delta})$ 对于 $\boldsymbol{\Delta} \in B\underline{\Delta}$ 有某种性质 p，当且仅当

$$\mu_{\tilde{\Delta}}(\boldsymbol{M}) < 1$$

其中 $\tilde{\underline{\Delta}} = \{\mathrm{diag}(\Delta_p,\Delta): \Delta_p \in \underline{\Delta}_p, \Delta \in \underline{\Delta}\}$。换句话说，只要一个矩阵的性质与 μ 值的测试有关，则将有一个更复杂的 μ 值的测试来判断是否这个性质对于以 LFTs 形式的结构化摄动是鲁棒的。

另外,"最大模相似定理"[25]中一个结论是,如果 $\boldsymbol{A}$ 是方阵,且它的所有特征值都在左半开平面上,则对于任意一个块结构 $\underline{\Delta}$,有

$$\sup_{\omega\in R}\mu_1[\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}]=$$
$$\sup_{R_e(s)\geqslant 0}\mu_1[\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}]$$

这个结果使在右半平面的鲁棒性检验也能用类似的式子表达,而不是沿着虚轴单一方向搜索。

9.4　用 μ 进行鲁棒性检验

我们知道,对有线性分式不确定性的线性系统可以用结构奇异值方法定量地检验其鲁棒性的,特别是在频域内,它常常作为鲁棒性分析的工具。假设多输入多输出线性定常系统的传递函数矩阵 $\boldsymbol{M}(s)$ 是一个稳定的、实有理的、真的标称矩阵,且它的维数是 $(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)$。已知所有摄动的块结构具有结构 $\underline{\Delta}$,而且这些摄动本身就是一个动态系统。现在的问题是确定这些摄动对控制系统的影响。

令所有实有理真的稳定的传递矩阵集合为 $\Xi(s)$。与块结构 $\underline{\Delta}$ 相关的 $\Xi(s)$ 为 $\Theta(s)$,它是具有块对角性质的、稳定的实有理传递矩阵集合,且块结构 $\underline{\Delta}$ 有

$$\Theta(\underline{\Delta})=\{\boldsymbol{\Delta}(s)\in\Xi : s\in C^+\}\tag{9.23}$$

则有下面定理:

定理9.4　对于 $\beta>0$,假定如图9.6所示的反馈回路是适定的,而且对于所有的 $\boldsymbol{\Delta}\in\Theta(\underline{\Delta})$ 且 $\|\boldsymbol{\Delta}\|_\infty<\beta^{-1}$ 是内稳定的,则其充分必要条件是

$$\|\mu_{\Delta}(\boldsymbol{M})\|_\infty=\sup_{\omega\in R}\mu_{\Delta}(\boldsymbol{M}(\mathrm{j}\omega))<\beta\tag{9.24}$$

定理 9.4 保证了 μ 频率响应曲线的峰值对应于决定回路系统鲁棒稳定性的摄动大小。

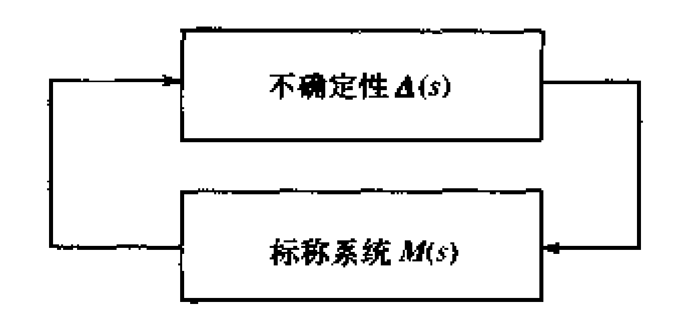


图 9.6　频域中的线性分式变换

除了考虑闭环系统的稳定性外，系统性能对摄动也必须具有鲁棒性。通常，外部扰动作用于系统会导致跟踪误差和调节误差。在有摄动的情况下，这些扰动对误差信号的影响会急剧增加，严重时甚至会使闭环系统性能达到无法容忍的地步。因此进行鲁棒性能检验很有必要。这样的检验应该指示出于一给定级别的摄动，在最坏情况下系统性能的下降度。如果传递矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是稳定的、实有理的、真的，且有 n_p+n_d 个输入和 n_w+n_z 个输出，$\boldsymbol{M}$ 按式 (9.16) 分块，则 $\boldsymbol{M}_{11}$ 有 n_p 个输入 n_w 个输出，$\boldsymbol{M}_{22}$ 有 n_d 个输入 n_z 个输出，$\boldsymbol{M}$ 剩下的两个子矩阵具有相应的维数。令块结构 $\underline{\Delta}_1 \subset C^{n_w \times n_p}$ 是相应于系统子矩阵 $\boldsymbol{M}_{11}$ 的不确定性，并且增广如下：

$$\underline{\Delta}_{\mathrm{sys}} = \left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Delta}_2 \end{bmatrix} : \boldsymbol{\Delta}_1 \subset \underline{\boldsymbol{\Delta}} \subset C^{n_w \times n_p}, \boldsymbol{\Delta}_2 \subset C^{n_z \times n_d}\right\} \tag{9.25}$$

上面的块结构用来讨论如图 9.6 所示回路的鲁棒性能。被摄动的闭环系统传递矩阵记为，且 $F_u(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Delta})$，且 $\boldsymbol{\Delta}(s) \in \Theta(\underline{\Delta}_{\mathrm{sys}})$。

定理 9.5　令 $\beta > 0$。对于所有 $\boldsymbol{\Delta}(s) \in \Theta(\underline{\Delta}_{\mathrm{sys}})$，且 $\|\boldsymbol{\Delta}\|_\infty < 1/\beta$，则图 9.7 所示的回路是适定的，内稳定的，且满足 $\|\boldsymbol{F}_u(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Delta})\|_\infty \leqslant \beta$ 的充分必要条件是：

$$\|\mu_{\underline{\Delta}_{\mathrm{sys}}}(\boldsymbol{M})\|_\infty = \sup_{\omega \in R} \mu_{\underline{\Delta}_{\mathrm{sys}}}(\boldsymbol{M}(\mathrm{j}\omega)) \leqslant \beta \tag{9.26}$$

总的说来，μ 的频率响应图中的峰值反映了使回路鲁棒稳定的最大摄动。

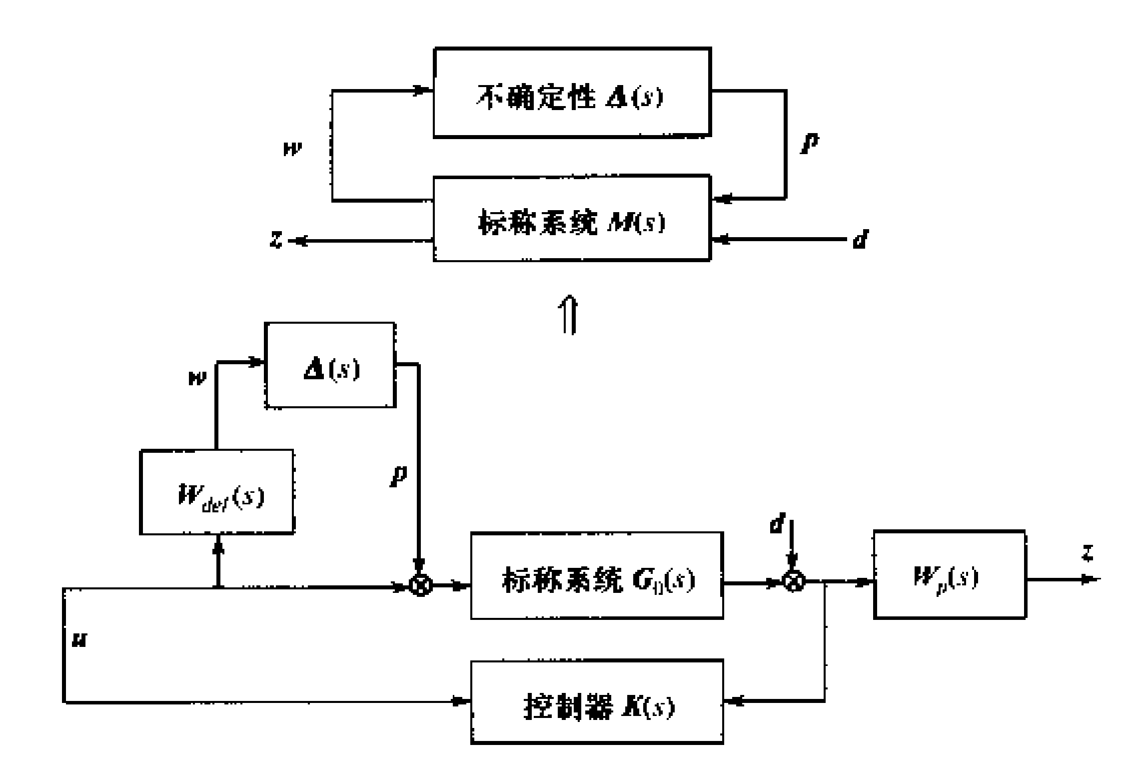


图 9.7　有摄动时的系统结构图

第 10 章　μ 分析与 μ 综合

10.1　引　　言

对于存在各类结构化不确定性的控制系统，用结构奇异值方法进行受控系统稳定性和性能分析的过程叫做 μ 分析。而设计控制器的过程(即求一稳定的控制器 $\mathbf{K}$、使闭环系统在有结构化不确定性的情况下也能保持稳定性和性能)，称为 μ 综合。

通常，控制系统的 μ 分析和 μ 综合设计过程包括以下几步：

(1) 闭环反馈系统结构的说明；

(2) 根据与频率相关的加权函数矩阵建立不确定性模型和性能指标；

(3) 获得进行控制器综合的开环联接结构；

(4) 对第(3) 步得到的开环联接结构设计控制器；

(5) 用结构奇异值方法分析得到的闭环系统的鲁棒特性——μ 分析；

(6) 在分析中得到一个与频率相关的尺度矩阵重新标度原先的开环联接结构；

(7) 重新设计标度后系统的控制器；

(8) 如果需要，迭代第(5)、(6)、(7) 步——μ 综合。

10.2　μ 分析

μ 分析是在所有稳定摄动 $\boldsymbol{\Delta}_G(s)$(且满足 $\|\boldsymbol{\Delta}_G\|_\infty < 1$) 范围内对稳定控制器 $\mathbf{K}(s)$ 进行的分析。这个控制器 $\mathbf{K}(s)$ 必须满足下

列条件：

(1) 摄动的闭环系统必须保持稳定；

(2) 图 9.7 中从 $\boldsymbol{d}$ 到 $\boldsymbol{z}$ 的加权灵敏度传递矩阵

$$S(\boldsymbol{\Delta}_G) = \boldsymbol{W}_p[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Delta}_G\boldsymbol{W}_{del})\boldsymbol{K}]^{-1} \tag{10.1}$$

对所有摄动有 $\|S(\boldsymbol{\Delta}_G)\|_\infty < 1$。

对于不确定性模型需作以下说明：已知标称对象传递矩阵 $\boldsymbol{G}_0$，不确定性的加权函数矩阵 $\boldsymbol{W}_{del}$ 以及归一化传递矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_G$。这两个矩阵必须是稳定的传递矩阵，而且 $\boldsymbol{W}_{del}$、$\boldsymbol{\Delta}_G$ 和 $\boldsymbol{G}_0$ 之间在右半闭平面内不存在零极点对消。归一化传递矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_G$ 表征标称对象模型与实际对象之间的差别，它将建模中所有不确定性都归入其中。实际对象则可描述为

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Delta}_G\boldsymbol{W}_{del}) \tag{10.2}$$

因此，需要鲁棒控制器进行控制的对象的整体集合可用传递矩阵 $\boldsymbol{W}_{del}$ 和 $\boldsymbol{\Delta}_G$ 来参数化。实际对象（包括建模误差和扰动）为下面集合的元素：

$$\Sigma \equiv \{\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Delta}_G\boldsymbol{W}_{del}) : \boldsymbol{\Delta}_G \text{ 是稳定的}, \|\boldsymbol{\Delta}_G\|_\infty \leqslant 1\} \tag{10.3}$$

在闭环系统中，从扰动 $\boldsymbol{d}$ 到性能输出 z 的灵敏度矩阵 $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_0\boldsymbol{K})^{-1}$ 描述了标称系统的性能，用加权灵敏度矩阵的 H_∞ 范数就可以衡量出性能的好坏。

已知一稳定的实有理的传递矩阵 $\boldsymbol{W}_p$，当 $\|\boldsymbol{W}_p(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_0\boldsymbol{K})^{-1}\|_\infty < 1$ 时，则系统达到标称性能。类似地，对于含有不确定模型的系统，用与频率相关的加权函数 $\boldsymbol{\Delta}_G$ 归一化系统建模时的不确定性；使加权灵敏度矩阵的范数小于 $\mathbf{1}$ 的性能用与频率相关的加权函数 $\boldsymbol{W}_p$ 归一化。

为了评价一个摄动系统控制器的性能，有以下三方面需要检验：

(1) 标称性能：对于标称模型 $\boldsymbol{G}_0$，满足性能指标

$$\|\boldsymbol{W}_p(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_0\boldsymbol{K})^{-1}\|_\infty < 1 \tag{10.4}$$

则闭环系统达到标称性能。

(2) 鲁棒稳定性:对于所有容许对象模型 $G \in \Sigma$,摄动 p 与不确定性加权控制 $w = W_{del}u$ 之间的闭环系统是内稳定的。根据小增益定理[43],对于输入乘积摄动型不确定性模型的系统鲁棒性能条件可用下式表达:

$$\| W_{del}KG_0(I + KG_0)^{-1} \|_\infty < 1 \qquad (10.5)$$

(3) 鲁棒性能:闭环系统对于所有 $G \in \Sigma$ 是内稳定的且性能指标满足

$$\| W_p(I + G_0K)^{-1} \|_\infty < 1, \forall G \in \Sigma \qquad (10.6)$$

则这个闭环系统满足性能鲁棒性。

根据 μ 的定义及主环定理,可以得到下面两个重要定理。

定理 10.1　鲁棒稳定性定理[2]

假定标称对象 G_0 是稳定的,不确定模型的不稳定极点个数与 Δ 无关,并且所有摄动块 Δ_i 满足 $\bar{\sigma}(\Delta_i) \leqslant 1$,则如图 10.1 所示的闭环系统对于所有这样的摄动是稳定的,当且仅当

$$\mu_\Delta(M) < 1, \forall \omega \qquad (10.7)$$

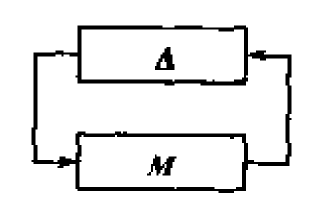


图 10.1　鲁棒稳定性分析的 M-Δ 结构

用 μ 的 M-Δ 框架结构不仅可以检验闭环系统的鲁棒稳定性,还可以检验其性能鲁棒性,这是 μ 理论的主要优点之一。图 10.2(a) 表示了进行鲁棒性能分析的 M-Δ 结构图,d 表示外部输入,e 表示外部误差输出,性能指标可表示为频域内从 d 到 e 的传递函数矩阵 $F_u(M,\Delta)$ 的 H_∞ 范数。

$$\| F_u(M,\Delta) \|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(F_u(M,\Delta)) < 1 \qquad (10.8)$$

图中传递矩阵 M 包括标称对象 G_0、控制器 K 和加权函数。图

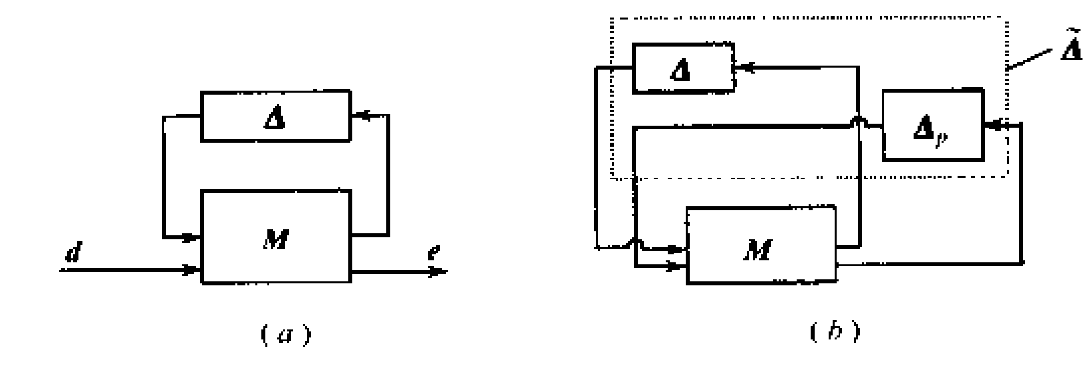


图 10.2 鲁棒性能分析的 M-Δ 结构

10.2(b) 表示等价于鲁棒稳定性要求鲁棒的性能要求。

Dolye, Wall 和 Stein(1982)[43] 建立了关于极小化灵敏度矩阵的 H_∞ 范数,更一般地,极小化对于闭环系统的任意传递矩阵的 H_∞ 范数,可以通过引入一个假想不确定性 $\boldsymbol{\Delta}_p$,使之嵌入在极小化稳定裕度的问题中,则有如下的鲁棒性能定理。

定理 10.2 鲁棒性能定理[2]

假定标称对象 $\boldsymbol{G}_0$ 是稳定的,不确定模型的不稳定极点个数与 $\boldsymbol{\Delta}$ 无关,另外 $\boldsymbol{\Delta}$ 中所有摄动 $\boldsymbol{\Delta}_i$ 满足 $\bar{\sigma}(\boldsymbol{\Delta}_i) \leqslant 1$,则图 10.2($a$) 所示的闭环系统对于摄动 $\boldsymbol{\Delta}$ 满足 H_∞ 性能条件 $\|\boldsymbol{F}_u(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Delta})\|_\infty < 1$,当且仅当

$$\mu_{\tilde{\Delta}}(\boldsymbol{M}) < 1, \forall \omega \tag{10.9}$$

由主环定理可知,定理 10.2 等价于

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1(\boldsymbol{M}_{11}) < 1 \\ &\max_{\Delta \in B\Delta} \mu_2(\boldsymbol{F}_u(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Delta})) < 1 \end{aligned}\right\} \tag{10.10}$$

鲁棒性能定理的重要性是显见的,因为无论是最优衰减系统噪声/扰动响应的 H_∞ 范数问题,还是极小化灵敏度矩阵 H_∞ 范数问题,抑或是最优稳定裕度鲁棒奇异值问题,都是如定理 10.2 所述的选择控制器,极小化闭环传递函数阵的 μ 函数的特殊情况。

10.3 μ 综合与 D-K 迭代

考虑图 10.3 所示的控制问题的标准线性分式描述。$\boldsymbol{P}$ 表示了

系统的开环联接，包含所有已知的环节，它包括标称对象模型、不确定性模型，性能和不确定性加权函数；$\boldsymbol{\Delta}$ 表示有范数有界的结构化不确定性集合；$\boldsymbol{K}$ 表示控制器。其中 $\boldsymbol{P}$ 有三个输入：摄动 $\boldsymbol{p}$、扰动 $\boldsymbol{d}$、控制 $\boldsymbol{u}$；三个输出：摄动 $\boldsymbol{w}$、误差 $\boldsymbol{e}$、测量输出 $\boldsymbol{y}$，则被控系统集可用 LFT 形式描述如下：

$$\{\boldsymbol{F}_u(\boldsymbol{P},\boldsymbol{\Delta}):\boldsymbol{\Delta}\in\underline{\Delta},\|\boldsymbol{\Delta}\|_\infty<1\} \tag{10.11}$$

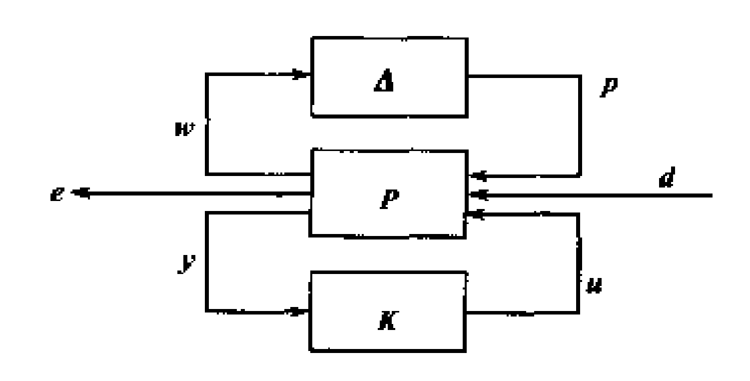


图 10.3　控制问题的 LFT 描述

10.3.1　优化目的

设计的目的是为了完成一个稳定的控制器 $\boldsymbol{K}(s)$，使闭环系统对于某类不确定性结构 $\boldsymbol{\Delta}\in\underline{\Delta}(\|\boldsymbol{\Delta}\|_\infty\leqslant 1)$ 是稳定的，且满足

$$\|\boldsymbol{F}_u(\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K}),\boldsymbol{\Delta})\|_\infty\leqslant 1 \tag{10.12}$$

这个性能指标包含了图 10.4 所示的线性分式变换 $\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})$ 的鲁棒性能检验。

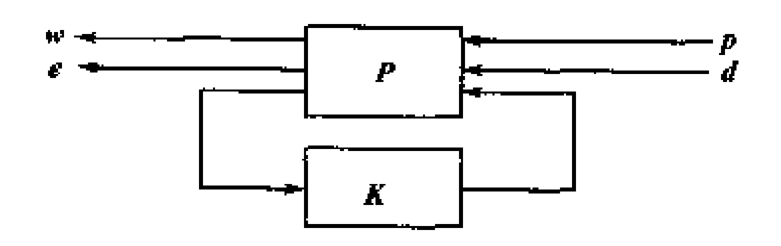


图 10.4　鲁棒性能检验的线性分式变换描述

为了评价闭环系统的鲁棒性能,定义一个增广摄动矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}$:

$$\widetilde{\boldsymbol{\Delta}} = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Delta}_p \end{bmatrix} : \boldsymbol{\Delta} \in \underline{\Delta}, \boldsymbol{\Delta}_p \in C^{n_d \times n_e} \right\} \tag{10.13}$$

由主环定理,对所有 $\boldsymbol{\Delta} \in \underline{\Delta}$,且 $\|\boldsymbol{\Delta}\|_\infty \leqslant 1$,则图 10.4 所示系统是稳定的,且有 $\|\boldsymbol{T}_{de}\|_\infty < 1$,当且仅当图 10.4 所示是 $\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})$ 稳定的,且

$$\max_\omega \mu_{\underline{\tilde{\Delta}}}(\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})(\mathrm{j}\omega)) < 1 \tag{10.14}$$

10.3.2 μ 综合

μ 综合的目的就是在所有稳定的控制器 $\boldsymbol{K}$ 中,最小化闭环传递函数 $\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})$ 的 $\mu_{\underline{\tilde{\Delta}}}(\cdot)$ 的峰值。更一般地,也就是

$$\min_{\boldsymbol{K}\text{稳定}} \max_\omega \mu_{\underline{\tilde{\Delta}}}[\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})(\mathrm{j}\omega)] \tag{10.15}$$

为了易于处理,用 μ 的上界 $\bar{\sigma}[\boldsymbol{D}(\cdot)\boldsymbol{D}^{-1}]$ 取代 $\mu_{\underline{\tilde{\Delta}}}(\cdot)$,则这个优化问题可描述为

$$\min_{\boldsymbol{K}\text{稳定}} \max_\omega \min_{\boldsymbol{D}_\omega \subset \underline{D}} \bar{\sigma}[\boldsymbol{D}_\omega \boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})(\mathrm{j}\omega)\boldsymbol{D}_\omega^{-1}] \tag{10.16}$$

$\boldsymbol{D}$ 是尺度矩阵(如式(8-11) 所述)。

这里,$\boldsymbol{D}$ 的最小化是 $\mu_{\underline{\tilde{\Delta}}}[\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})(\mathrm{j}\omega)]$ 的一种近似。$\boldsymbol{D}_\omega$ 是尺度矩阵集合 $\underline{D}$ 中的元素,且在每个 ω 处相互独立。因此有

$$\min_{\boldsymbol{K}\text{稳定}} \min_{\boldsymbol{D}_\omega \in \underline{D}} \max_\omega \bar{\sigma}[\boldsymbol{D}_\omega \boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})(\mathrm{j}\omega)\boldsymbol{D}_\omega^{1}] \tag{10.17}$$

即

$$\min_{\boldsymbol{K}\text{稳定}} \min_{\boldsymbol{D}_\omega \in \underline{D}} \|[\boldsymbol{D}_\omega \boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})(\mathrm{j}\omega)\boldsymbol{D}_\omega^{-1}]\|_\infty \tag{10.18}$$

10.3.3 D-K 迭代

目前,μ 综合的有效近似方法是"D-K 迭代",它包括下面两步

迭代过程：

1. 保持 $D(s)$ 不变

为解式(10.18)，首先保持 $D(s)$ 不变。已知一稳定的，最小相位实有理矩阵 $\hat{D}(s) = D(s)$，如图 10.5 定义 P_D。

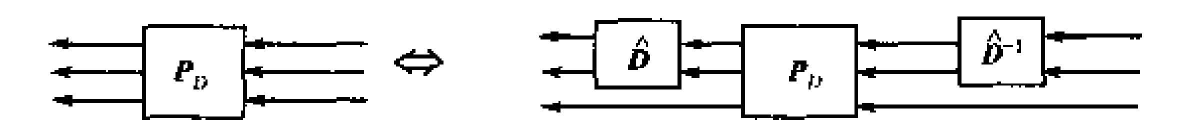


图 10.5 P_D 的定义

则下面结论成立：

(1) K 使 P_D 稳定的充分必要条件是 K 使 M 稳定；

(2) $F_l(P_D, K) = \hat{D}F_l(P, K)\hat{D}^{-1}$；

(3) P_D 是一个实有理传递函数阵。

因此解优化问题

$$\min_{K\text{稳定}} \| [\hat{D}F_l(P, K)\hat{D}^{-1}] \|_\infty$$

等价于

$$\min_{K\text{稳定}} \| F_l(P_D, K) \|_\infty$$

它实际上是 H_∞ 优化控制问题，可以通过解两个 Riccat 方程得到。

2. 保持 K 不变

现在已知一稳定的控制器 $K(s)$，则解下面优化问题

$$\min_{D_\omega \in \underline{D}} \bar{\sigma}\ (D_\omega F_l(P, K)(j\omega) D_\omega^{-1})$$

这个最小化是在集合 $\underline{D}$ 中所有实、正定 D_ω 上进行的。这是一个凸优化问题，每个离散函数 d_i 由一个真的、稳定的、最小相的传递函数 $\hat{d}_{R_i(s)}$ 来拟合。$\hat{d}_{R_i(s)}$ 构成 $\hat{D}(s)$ 的对角线元素，并被吸收到原开环广义对象 P 中得到 P_D。

D-K 迭代法可用下面流程图简述：

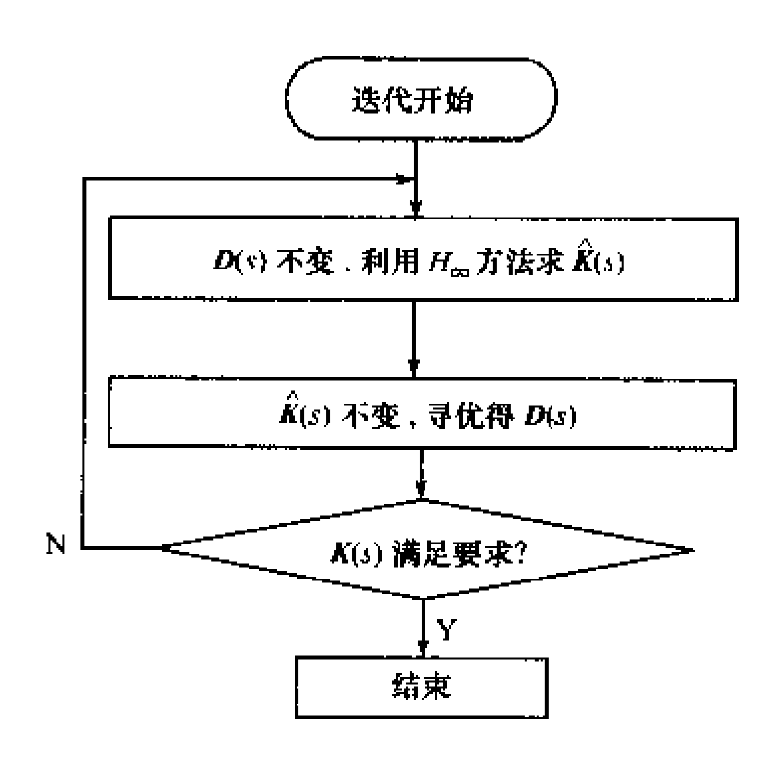


图 10.6 D-K 迭代流程图

第 11 章　纵向飞行控制系统 μ 设计方法

由于实际飞行控制系统必然存在着各种不确定性，所以设计稳定的控制器，使整个飞机系统不但具有鲁棒稳定性，而且具有性能鲁棒性，有着重要的实际意义。

以往控制器的设计方法，如多变量控制理论中的 LQR(Linear Quadratic Regulator)、LQG(Linear Quadratic Guass)、H_∞ 优化控制等方法，存在着较大的保守性，不能真实反映飞机系统的稳定裕度，也不能很好地保证系统的性能鲁棒性。所以，本章以某飞机的纵向飞行控制系统的设计为例，分别采用 H_∞ 最优控制方法和结构奇异值方法对控制器进行分析与设计，研究系统的鲁棒性。通过两种设计方法的比较，体现出结构奇异值方法的优越性。

11.1　模型的建立

假定所讨论的飞机纵向模型有两个输入：升降舵偏转(δ_e)及鸭翼偏转(δ_c)；两个输出：迎角(α)和俯仰角(ϑ)。

系统的不确定性主要源于下面几个方面：

(1) 鸭翼和升降舵执行机构的不确定性。由于控制这些舵面偏转的电信号需要转换为由电气和液压传动装置的机械偏转信号，这在实际系统中当然不像标称系统那样准确。

(2) 鸭翼和升降舵面的偏转产生作用在飞机上的力与力矩的不确定性。这个不确定性产生于空气动力系数，它随着飞行条件的变化而变化；它还产生于飞机的几何形状。更确切地说，舵面的偏

转改变了飞行器周围的气流，因而产生了力和力矩，在这个产生过程中相伴着不确定性因素的产生。

(3) 由空气动力产生的力和力矩得到的线加速度和角加速度的不确定性。这源于飞机的各种惯性参数和被忽略的动态，像燃油泄漏、飞机结构挠性等。

(4) 还有一些其它不太清楚的不确定性形式。

在这里，我们把各种不确定性可以归入到一个不确定性全块中。因此给出下面飞机纵向四状态标称模型 $\boldsymbol{G}_0$:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}_0 &= \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{y}_0 &= \boldsymbol{C}_0\boldsymbol{x}_0 \end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} -2.3e-02 & -3.7e-01 & -1.9e+01 & -3.2e+01 \\ 0.0e+00 & -1.9e+00 & 9.8e-01 & 0.0e+00 \\ 1.2e-02 & -1.2e+01 & -2.6e+00 & 0.0e+00 \\ 0.0e+00 & 0.0e+00 & 1.0e+00 & 0.0e+00 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_0 = \begin{bmatrix} 0.0e+00 & 0.0e+00 \\ -4.1e-01 & 0.0e+00 \\ -7.8e+01 & 2.2e+01 \\ 0.0e+00 & 0.0e+00 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_0 = \begin{bmatrix} 0.0e+00 & 5.7e+01 & 0.0e+00 & 0.0e+00 \\ 0.0e+00 & 0.0e+00 & 0.0e+00 & 5.7e+01 \end{bmatrix}$$

这个模型是在高度为 7.62km，速度为 0.9Ma 的操作条件下线性化而得到的。其中

状态变量 $\boldsymbol{x}_0 = [v \quad \alpha \quad q \quad \vartheta]^{\mathrm{T}}$

式中，v 为前向速度；q 为俯仰角速度；α 为迎角；ϑ 为俯仰角。

输入变量 $\boldsymbol{U} = [\delta_e \quad \delta_c]^{\mathrm{T}}$

式中，δ_e 为升降舵位置；δ_c 为鸭翼位置。

输出变量 $\boldsymbol{y}_0 = [\alpha \quad \vartheta]^{\mathrm{T}}$

已知这个标称模型 $\boldsymbol{G}_0$ 和不确定性加权函数 $\boldsymbol{W}_{del}$，一种带有乘积型结构化不确定性和控制器的实际系统 $\boldsymbol{G}$(如图 11.1 所示)

可描述为

$$G = \{G_0(I + \Delta_G W_{del}) : \Delta_G \text{ 是稳定的}, \|\Delta_G\|_\infty \leqslant 1\} \tag{11.2}$$

这个 G 是需要鲁棒控制器 $K(s)$ 进行控制的。

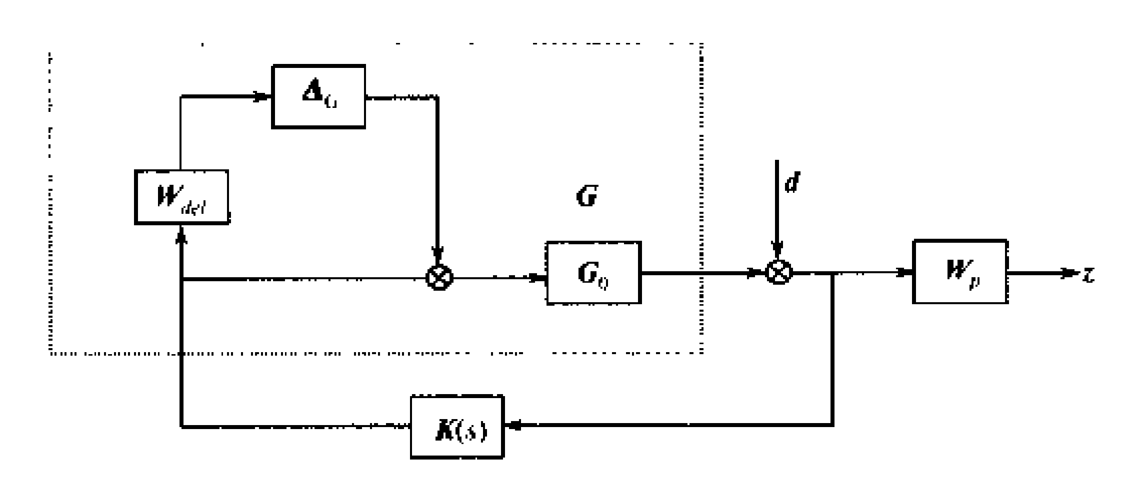


图 11.1　带有不确定性的飞行控制闭环系统

图 11.1 所示的实际系统方块图反映了标称模型 G_0 与控制器 $K(s)$ 的反馈结构、与不确定性模型和性能指标相关环节的连接关系。虚线框代表实际系统，传递函数为 G。实际系统模型包括飞机动态标称模型 G_0，两个表示实际系统中不确定性的环节 Δ_G 和 W_{del}。建模中所有不确定性都归入归一化传递矩阵 Δ_G 中，它描述了标称模型 G_0 和实际模型 G 之间的差别。另外 Δ_G 是稳定的且仅知道有范数边界条件 $\|\Delta_G\|_\infty < 1$ 及其结构。频率加权函数 W_{del} 是已知的，它反映了模型中不确定性在指定频率范围内的权重。性能指标是对所有容许的不确定性 Δ_G，从 d 到 z 的传递矩阵在 H_∞ 范数意义下达到最小。因此性能加权函数 W_p，反映了在指定频率范围内所要求达到的性能的权重。

11.2　控制问题的提出

首先我们从标称模型的开环极点看起，如表 11.1 所示。

表 11.1　标称系统的开环极点

实　部	虚　部
− 4.4153e − 002	− 2.0931e − 001
− 4.4153e − 002	2.0931e − 001
− 2.2321e + 000	− 3.3779e + 000
− 2.2321e + 000	3.3779e + 000

在摄动情况下，实际系统的开环极点如表 11.2 所示。

表 11.2　实际系统的开环极点

实　部	虚　部
− 3.0000e − 002	0.0000e + 000
− 3.0000e − 002	0.0000e + 000
− 4.4153e − 002	− 2.0931e − 001
− 4.4153e − 002	2.0931e − 001
− 2.2321e + 000	− 3.3779e + 000
− 2.2321e + 000	− 3.3779e + 000
− 1.0000e + 004	0.0000e + 000
− 1.0000e + 004	0.0000e + 000

显然，由于摄动的影响，使开环系统的极点发生很大变化，这必然导致系统性能变坏。可见原来的系统不具有鲁棒性。

因此线性定常系统的 μ 控制问题可叙述如下：对所有稳定的摄动 $\boldsymbol{\Delta}_G$，且 $\|\boldsymbol{\Delta}_G\|_\infty < 1$，找寻一个稳定的控制器 $\boldsymbol{K}(s)$，使得闭环系统在摄动情况下仍能保持稳定，且加权灵敏度传递矩阵

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\Delta}_G) = \boldsymbol{W}_p(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Delta}_G\boldsymbol{W}_{del})\boldsymbol{K})^{-1}$$

有

$$\|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\Delta}_G)\|_\infty < 1 \tag{11.3}$$

成立。

下面分别从 H_∞ 最优控制方法和结构奇异值方法对控制器进行分析与设计，来研究两种方法对系统的鲁棒性的影响。

11.3 控制器的设计与分析

取加权函数 W_{del}、W_p 为

$$W_{del} = \begin{bmatrix} \dfrac{50(s+100)}{s+10000} & 0 \\ 0 & \dfrac{50(s+100)}{s+10000} \end{bmatrix}$$

$$W_p = \begin{bmatrix} \dfrac{0.5(s+3)}{s+0.03} & 0 \\ 0 & \dfrac{0.5(s+3)}{s+0.03} \end{bmatrix}$$

加权函数矩阵 W_{del} 取为对角的，且对角元素相等，说明不确定性描述在某种意义下关于标称模型 G_0 是“球形的”(round ball)，则用这种不确定性加权函数描述的实际系统为

$$G = \left\{ G_0\left(I_2 + \frac{50(s+100)}{s+10000}\Delta_G(s)\right) : \Delta_G(s)\text{ 是稳定的，且 } \|\Delta_G(s)\|_\infty \leqslant 1 \right\}$$

在任意频率 ω 处，$|W_{del}(j\omega)|$ 可以看作模型在这个频率点的不确定的百分数。本书所讨论的问题中，这个加权函数说明在低频处，潜在着 50% 的建模误差，在频率 173 rad/s 处，模型不确定性高达 100%，在更高频处不确定性比重会更大。

11.3.1 H_∞ 控制器的设计与分析

对于如下广义受控对象 G 的状态空间实现

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_1 w + D_2 u \\ y &= x \end{aligned}\right\} \tag{11.4}$$

即

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_1 & D_2 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11.5}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in R^{n}, \boldsymbol{A} \in R^{n\times n}, \boldsymbol{B}_1 \in R^{n\times m_1}, \boldsymbol{B}_2 \in R^{n\times m_2}, \boldsymbol{C}_1 \in R^{p_1\times n}$，而 $\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 为具有相应维数的实数矩阵。对该广义受控对象，作如下假设：

假设 11.1 $[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}_2]$ 是能稳定的，即系统 $[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}_2 \quad \boldsymbol{C}_1]$ 的能控模态是渐近稳定的。

假设 11.2 $\boldsymbol{D}_1 = 0, \boldsymbol{D}_2 = 0$。

假设 11.3 $[\boldsymbol{C}_1 \quad \boldsymbol{A}]$ 能检测。

则在摄动情况下，满足条件(11.3)成立的状态反馈矩阵 $\boldsymbol{K}_\infty$ 存在的充分必要条件是如下等价条件之一成立。

(1) $\boldsymbol{H} \in \mathrm{dom(Ric)}$，且 $\mathrm{Ric}(\boldsymbol{H}) \geqslant 0$，其中 $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \frac{1}{\gamma^2}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$。

(2) 代数 Riccati 方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \frac{1}{\gamma^2}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1 = 0$$

存在正半定解 $\boldsymbol{P} \geqslant 0$，且 $\boldsymbol{A} + \frac{1}{\gamma^2}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 为渐近稳定矩阵。当上述条件成立时，$\boldsymbol{P} \in \mathrm{Ric}(\boldsymbol{H})$，则控制器 $\boldsymbol{K}_\infty$[24] 为

$$\boldsymbol{K}_\infty = -\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$$

对于本书所讨论的图 11.1 所示的带有乘积型结构化不确定性模型的闭环反馈结构如图 11.2 所示。将图 11.2 的闭环连接内部转化为图 11.3 所示的四输入四输出的结构形式。

利用上面所讲到的 H_∞ 控制器设计方法，控制器 $\boldsymbol{K}_\infty$ 的状态空间实现为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_{K_\infty} &= \boldsymbol{A}_{K_\infty}\boldsymbol{x}_{K_\infty} + \boldsymbol{B}_{K_\infty}\boldsymbol{u}_{K_\infty} \\ \boldsymbol{y}_{K_\infty} &= \boldsymbol{C}_{K_\infty}\boldsymbol{x}_{K_\infty} + \boldsymbol{D}_{K_\infty}\boldsymbol{u}_{K_\infty} \end{aligned}\right\} \qquad (11.6)$$

控制器 $\boldsymbol{K}_\infty$ 的极点如表 11.3 所示。

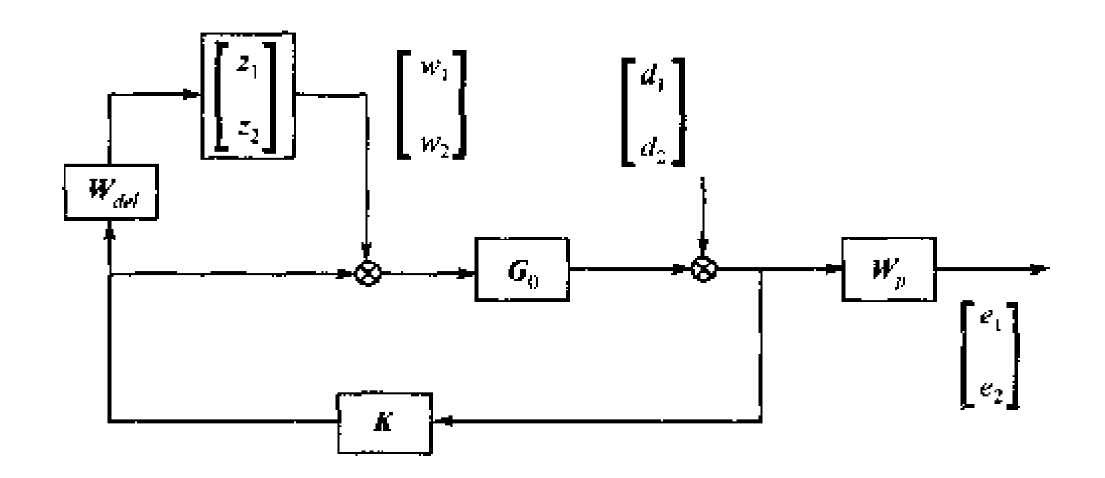


图 11.2 图 11.1 的闭环连接结构

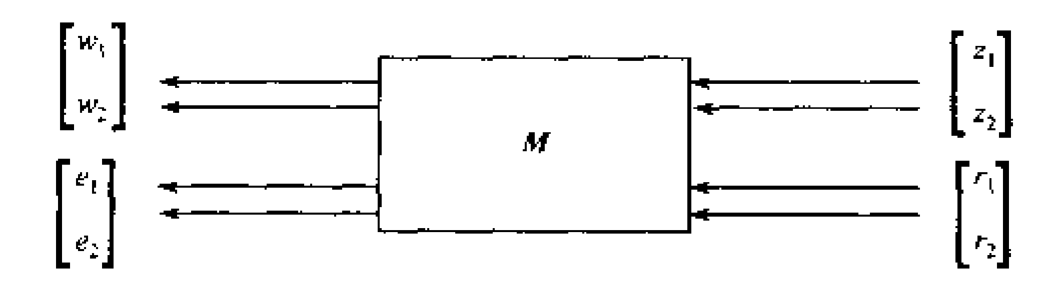


图 11.3 4×4 传递函数矩阵 $\boldsymbol{M}$

表 11.3 控制器 $\boldsymbol{K}_{\infty}$ 的极点

实 部	虚 部
−3.87e+003	0.00e+000
−1.48e+002	9.78e+001
−1.48e+002	−9.78e+001
−9.90e+001	0.00e+000
−1.37e+001	0.00e+000
2.26e−002	0.00e+000
−3.00e−002	0.00e+000
−3.00e−002	0.00e+000

可见，K_∞ 是一个稳定的控制器，其频率特性曲线如图 11.4 所示。

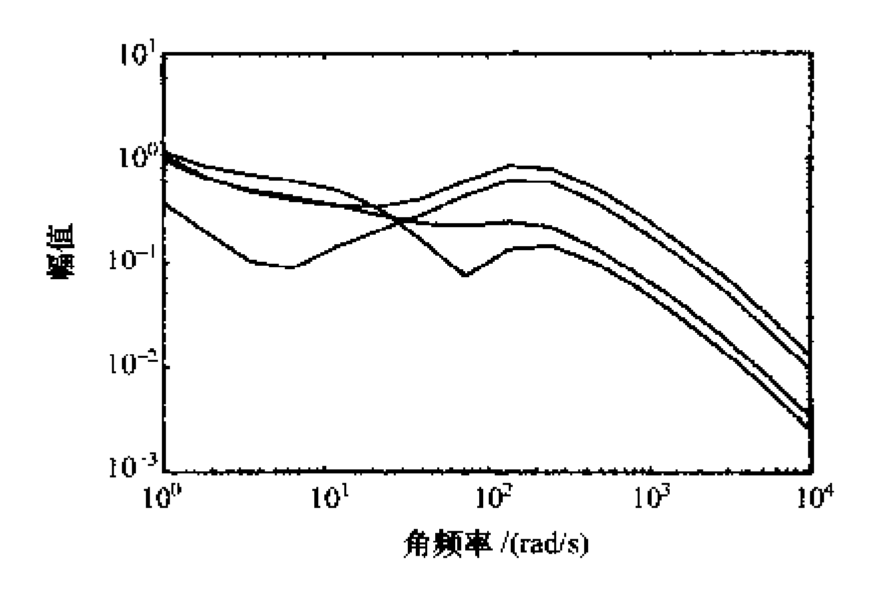


图 11.4 K_∞ 的频率特性曲线

另外，可以算出闭环系统的极点均在左半平面内，所以它也是稳定的。

下面用第 10 章讲到的鲁棒稳定性、标称性能和鲁棒性能的检验方法来分析该 H_∞ 控制器在系统有不确定性摄动情况下的作用。

由于闭环系统有四个输入四个输出，前两个输入／输出对应于不确定性块的输入／输出，后两个输入／输出对应于扰动抑制的输入／输出。因此可以定义不确定性输入／输出为 2×2 全块，扰动抑制的输入／输出为 2×2 性能全块，这样便得到摄动块的结构信息

$$\text{block} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

由文献[28]可知，矩阵 block 总是一个两列的矩阵，每一行代表一种摄动的结构信息，其中每列元素值视不确定性的输入／输出个数而定。

鲁棒性能检验时需要给出一个增广的块结构 $\boldsymbol{\Delta}$，它由与实际

摄动模型相关的结构和所感兴趣的相关量的结构组成的。因此,块结构 $\boldsymbol{\Delta}$ 为

$$\underline{\Delta} = \{\mathrm{diag}[\boldsymbol{\Delta}_1, \boldsymbol{\Delta}_2] : \boldsymbol{\Delta}_1 \in \underline{\Delta}_1, \boldsymbol{\Delta}_2 \in \underline{\Delta}_2\} \qquad (11.7)$$

其中 $\boldsymbol{\Delta}_1$ 是与乘积型不确定模型 $\boldsymbol{G}$ 相关的不确定性结构,这个摄动假定是稳定的,有理的 2×2 的传递函数矩阵。因此,$\underline{\Delta}_1$ 为 2×2 的复矩阵集。$\boldsymbol{\Delta}_2$ 与摄动模型无关,可称为"性能块"。它是在采用主环定理时产生的。它表示了从 $\boldsymbol{d}\rightarrow\boldsymbol{e}$ 被摄动的传递函数的"大小"可以通过其最大奇异值得到。

对于适当的块结构 $\boldsymbol{\Delta}$,下面三个论述是等价的:

(1) 对于所有的 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{g}$,图 11.1 所示闭环系统是稳定的,有

$$\| \boldsymbol{W}_p(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{GK})^{-1} \|_\infty < 1$$

(2) 对于所有 $\boldsymbol{\Delta}\in\Xi(\Delta_1)$,图 11.1 中的线性分式变换是稳定的,有

$$\sup_{\omega\in R}\bar{\sigma}\,[\boldsymbol{F}_u(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Delta})(\mathrm{j}\omega)] < 1$$

(3) 传递函数矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是稳定的,有

$$\sup_{\omega\in R}\mu_\Delta(\boldsymbol{M}(\mathrm{j}\omega)) < 1$$

画出闭环系统性能曲线,如图 11.5 和图 11.6 所示。从图 11.5 可以看出鲁棒稳定性曲线和标称性能均不超过 0.6,所以满足要求。然而,我们更关心的是闭环系统的鲁棒性能。显然,从图 11.6 可以看到 μ 有峰值 14.3,也就是说有稳定的摄动 $\boldsymbol{\Delta}_G$, $\|\boldsymbol{\Delta}_G\|_\infty\approx 1/14.3$,使得摄动的加权灵敏度函数的最大奇异值峰值 ≈ 14.3,因此尽管标称系统有很好的标称性能和鲁棒稳定性,但性能鲁棒性却相当差。所以,系统的鲁棒性能没有达到要求。

另外,还可以证明控制器对于不确定结构的变化很敏感。如果被摄动的参数规范化、对角化都有可能使系统的鲁棒性能得到改善。

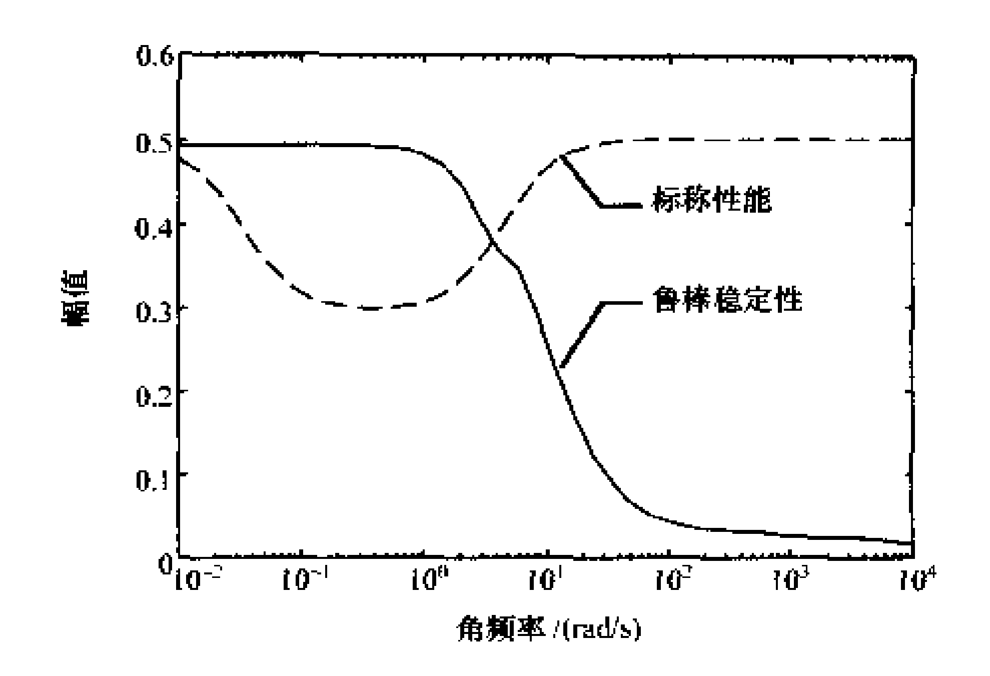


图 11.5　H_∞ 控制器的闭环系统的鲁棒稳定性和标称性能

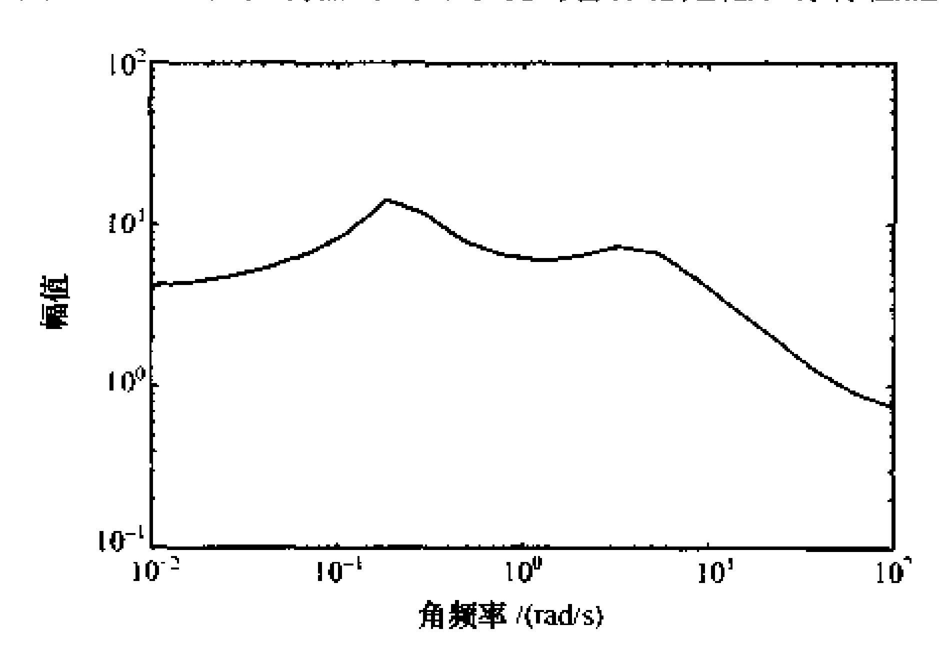


图 11.6　H_∞ 控制器的闭环系统的性能鲁棒性

11.3.2　μ 控制器的设计与分析

由前述可知，目标函数 (11.3) 正好与 μ 的设计要求相一致，因此可采用 μ 的设计方法。

为了使描述的问题构成 μ 分析的 $\boldsymbol{M}$-$\boldsymbol{\Delta}$ 框架结构，将原实际闭环系统断开与摄动和控制器的连接，成为一开路系统，如图 11.7 所示。

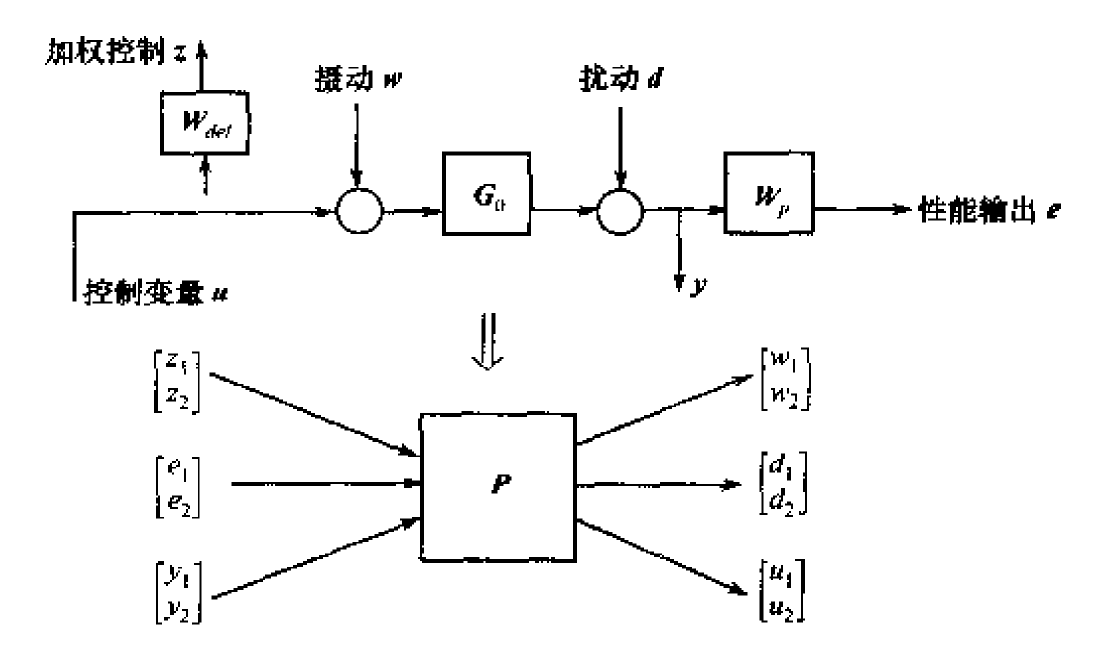


图 11.7　开环连接 $\boldsymbol{P}$ 的获得

这时标称系统 $\boldsymbol{P}$ 有 8 个状态,6 个输入和 6 个输出,其中前两个输入/输出对应乘积摄动不确定性块,中间两个输入/输出对应于扰动输入和误差输出,最后两个输入/输出对应于从控制器来的测量输出。

依第 10 章所述的 D-K 迭代算法,用 H_∞ 综合法更新控制器,用 μ 分析法对每一次迭代产生的控制器进行评估,其步骤可用下面算法流程图(图 11.8) 来表示。

μ 控制器可描述为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_\mu &= A_\mu x_\mu + B_\mu u \\ y_\mu &= C_\mu x_\mu + D_\mu u\end{aligned}\right\} \tag{11.7}$$

D-K 迭代的第一步就是设计图 11.7 中开环连接 $\boldsymbol{P}$ 的 H_∞ 优化控制器 $\boldsymbol{K}_1$。依据 D-K 迭代,保持 $\boldsymbol{D}$ 不变使图 11.9 中的 $\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})$ 的 $\|\cdot\|_\infty$ 最小求得 $\boldsymbol{K}_1$。$\boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{P},\boldsymbol{K})$ 是从摄动输入($\boldsymbol{w}$)和扰动($\boldsymbol{d}$)到摄动输出($\boldsymbol{z}$) 和误差($\boldsymbol{e}$) 的传递函数。

这时闭环系统的鲁棒稳定性和标称性能如图 11.10 所示。可

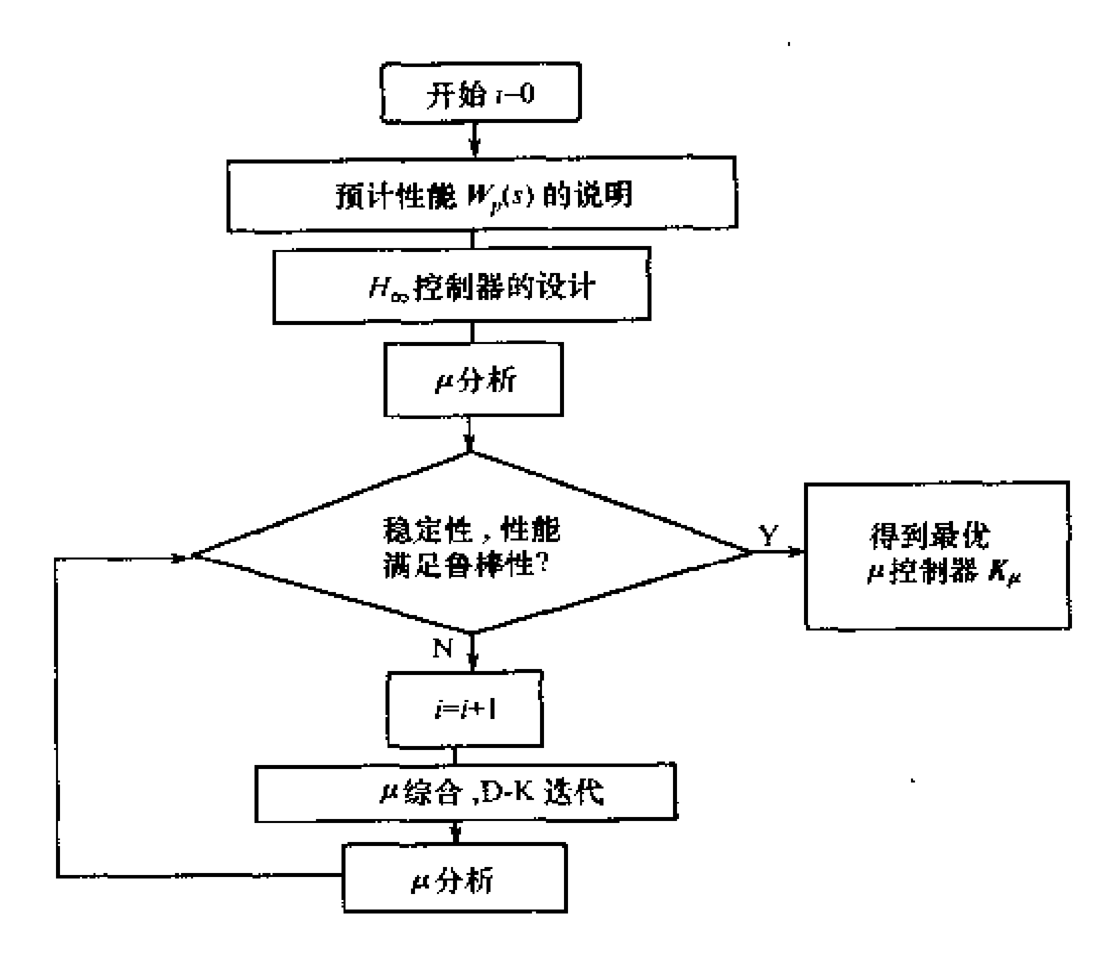


图 11.8　控制系统 μ 分析与 μ 综合的流程图

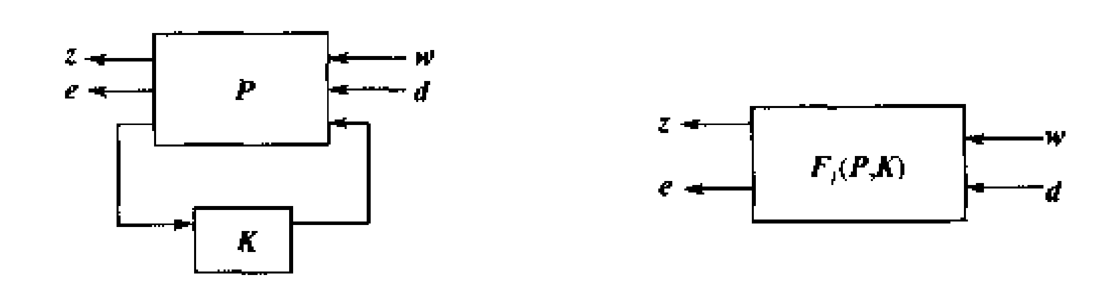


图 11.9　闭环线性分式变换

以看出闭环系统达到了鲁棒稳定性和标称性能的要求，因为加权输出灵敏度函数的最大奇异值峰值为 0.65，加权输入补灵敏度函数的最大奇异值峰值为 0.84。而鲁棒性能的满足只有当在每一个频率点处闭环系统频率响应 $\mu_\Delta < 1$ 才行。图 11.11 给出了 H_∞ 控制器闭环系统的最大奇异值和 μ 值曲线。因为 μ 曲线在频率

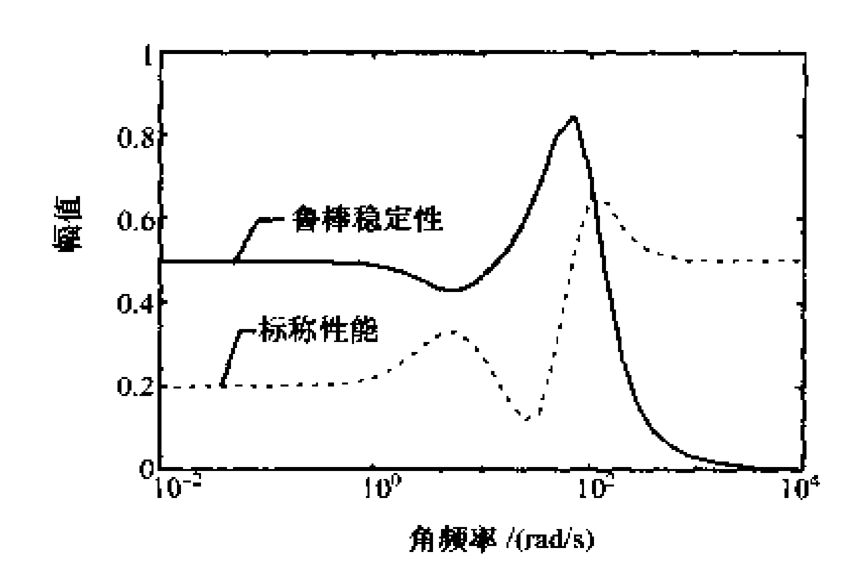


图 11.10　第一次迭代后闭环系统的
鲁棒稳定性和标称性能

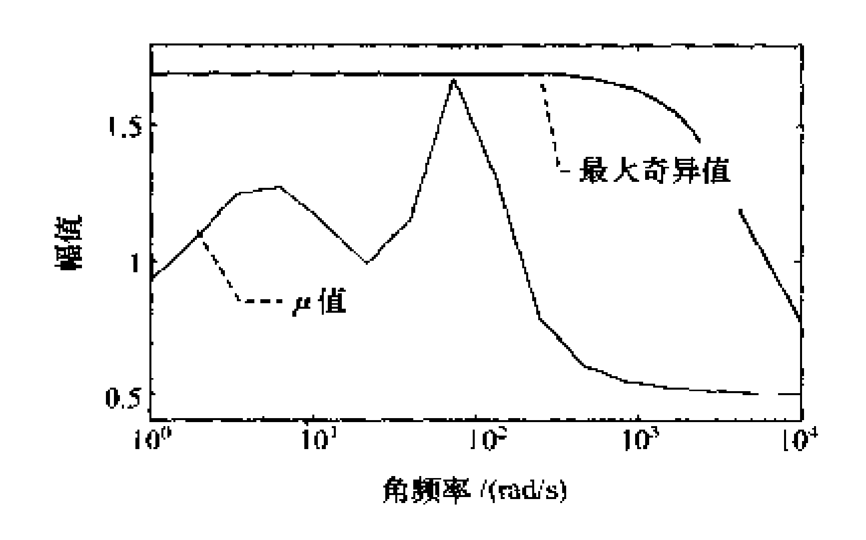


图 11.11　H_∞ 控制器闭环系统的
最大奇异值和 μ 值

73.6rad/s 处的峰值为 1.69，并且在 ω 的大部分频段上，μ 值大于 1。所以 H_∞ 控制器不能使系统具有性能鲁棒性。

可见 μ 分析法在 ω 的大部分频段上改善了 $\bar{\sigma}(\cdot)$ 的值，但在峰值处没有改变，通过下一步的迭代来降低 μ 的峰值。这里用三阶的多项式拟合尺度矩阵 $\boldsymbol{D}(s)$，经过三次迭代就可以得到一个性能较

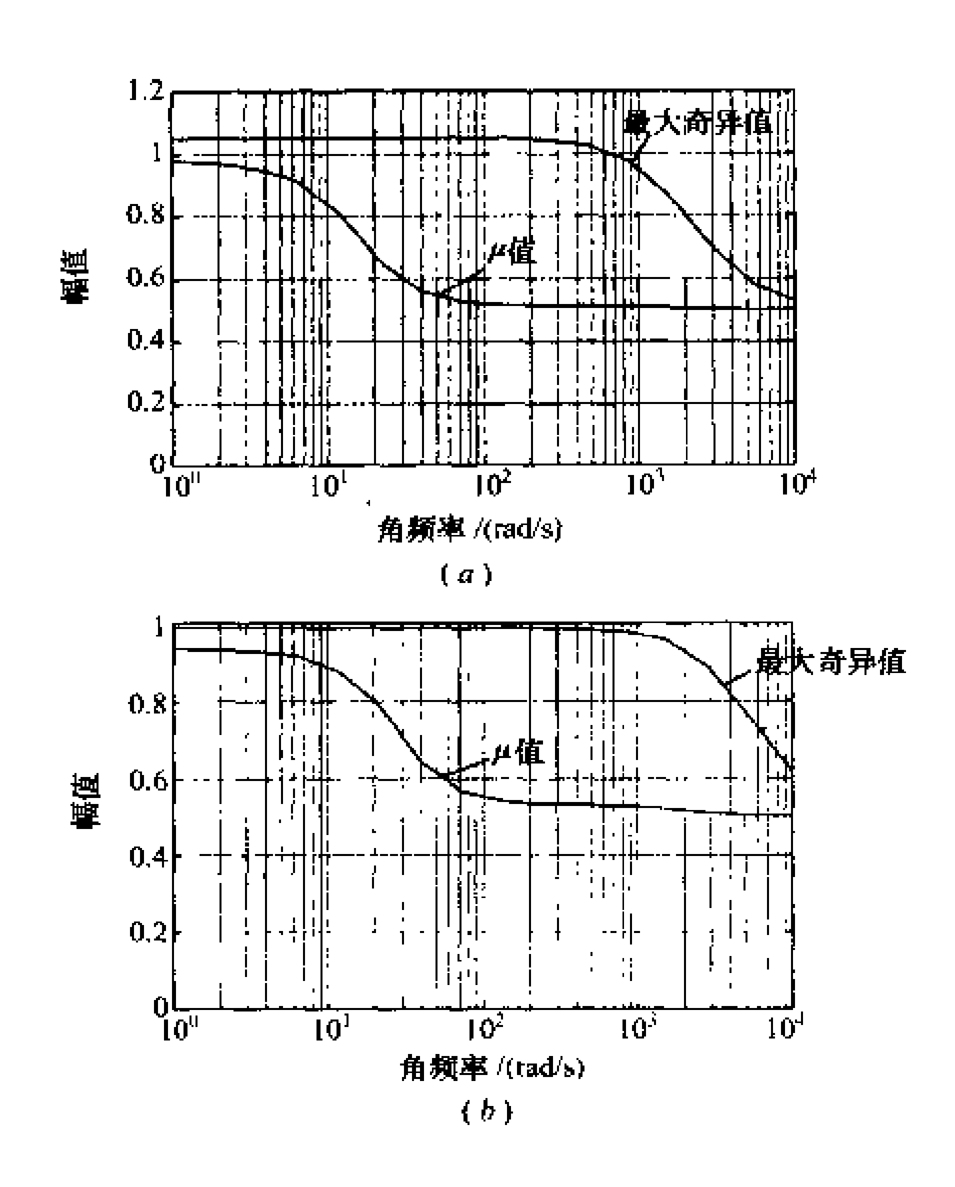


图 11.12 第二、三次迭代后 μ 控制器闭环系统的奇异值

(a)μ 分析中第二次迭代后的奇异值;

(b)μ 分析中第三次迭代后的奇异值。

好的 $\boldsymbol{K}_\mu$ 控制器。从每次迭代后闭环系统的奇异值曲线(图 11.12)和闭环系统的最大奇异值及 μ 值曲线(图 11.13) 可以看出,闭环系统的鲁棒性在不断改善,最后直至 $\mu < 1$。

从图中可以看出 μ 的峰值最终是 0.98,这说明了用 $\boldsymbol{K}_\mu$ 控制器的闭环系统达到了鲁棒性能的要求。

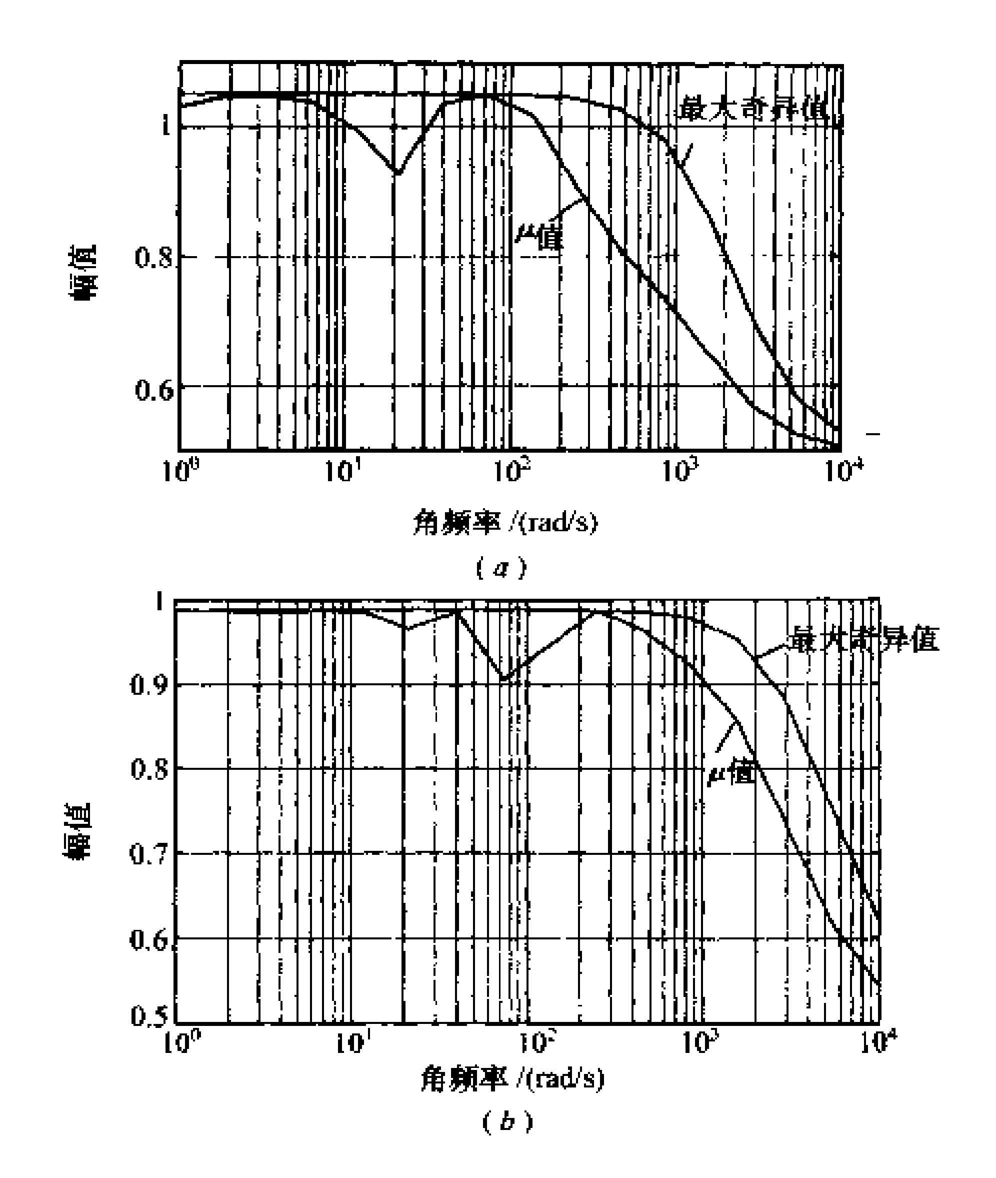


图 11.13　第二、三次迭代后闭环系统的最大奇异值和 μ 值曲线

(a) 分析中第二次迭代后闭环系统的最大奇异值与 μ 值曲线；

(b) 分析中第三次迭代后闭环系统的最大奇异值与 μ 值曲线。

11.4　H_∞ 控制器与 μ 控制器的比较

为了说明两种控制方法下闭环系统的鲁棒性，下面分别从频域和时域进行说明。

11.4.1　频域

在两种设计控制器的设计方法下，从闭环系统的最大奇异值（图 11.14）、μ 值(图 11.15)、有摄动和无摄动情况下加权输出灵

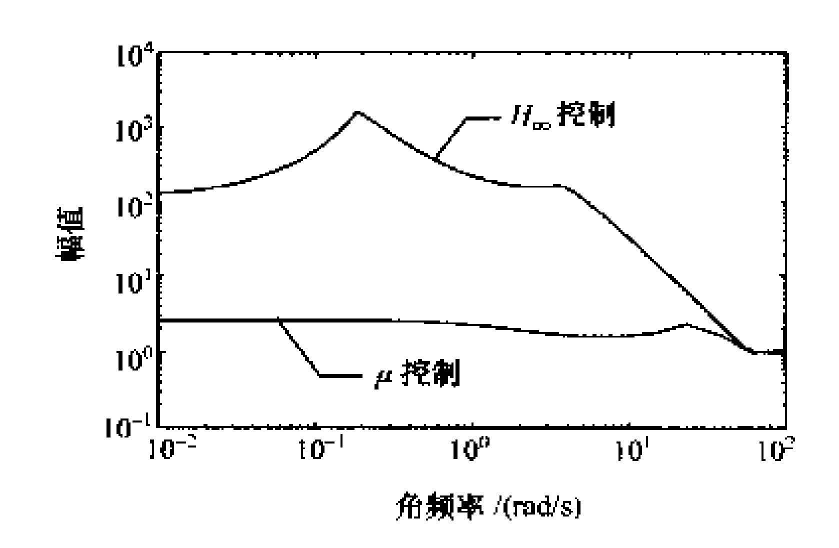


图 11.14　H_∞ 和 μ 控制的闭环系统的最大奇异值

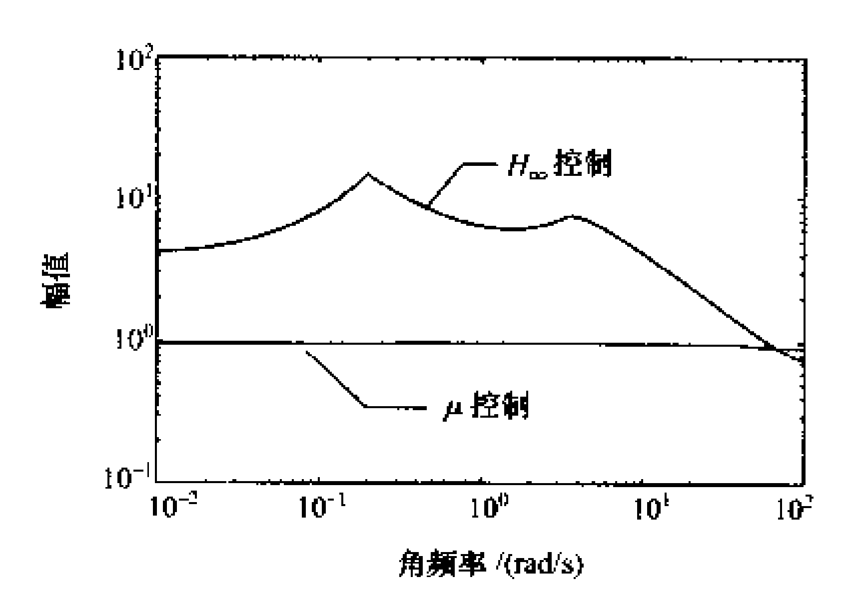


图 11.15　H_∞ 和 μ 控制的闭环系统 μ 值

敏度函数(图 11.16、图 11.18)、有摄动和无摄动情况下加权输入补灵敏度函数(图 11.17)、条件数(图 11.19) 等几方面进行比较。

取摄动为

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}$$

在标称回路传递函数矩阵的最大奇异值曲线和输出灵敏度函数曲线中,可以看到系统的鲁棒性能和鲁棒稳定性。

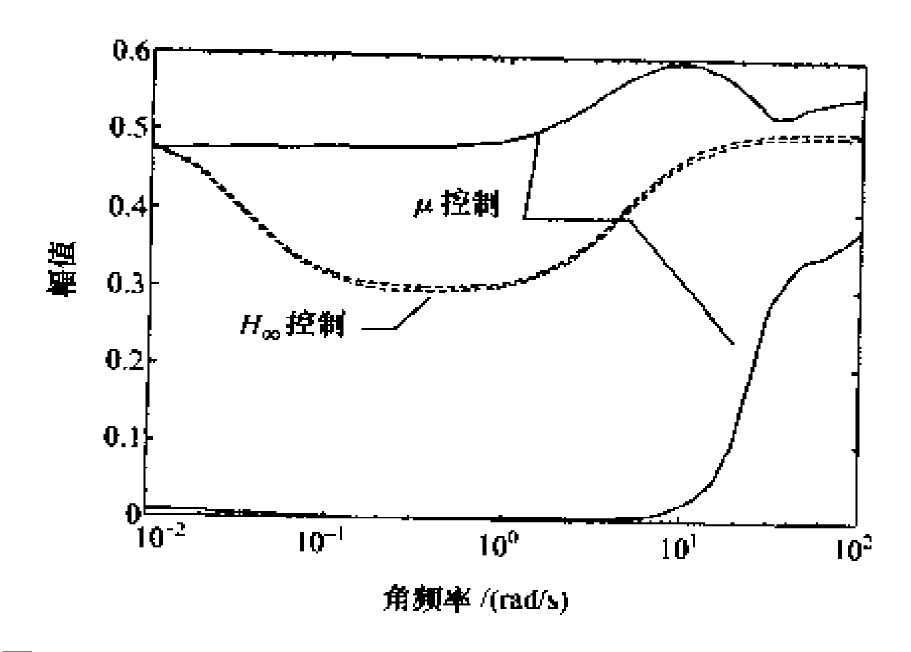


图 11.16 两种控制律下闭环系统的加权输出灵敏度曲线

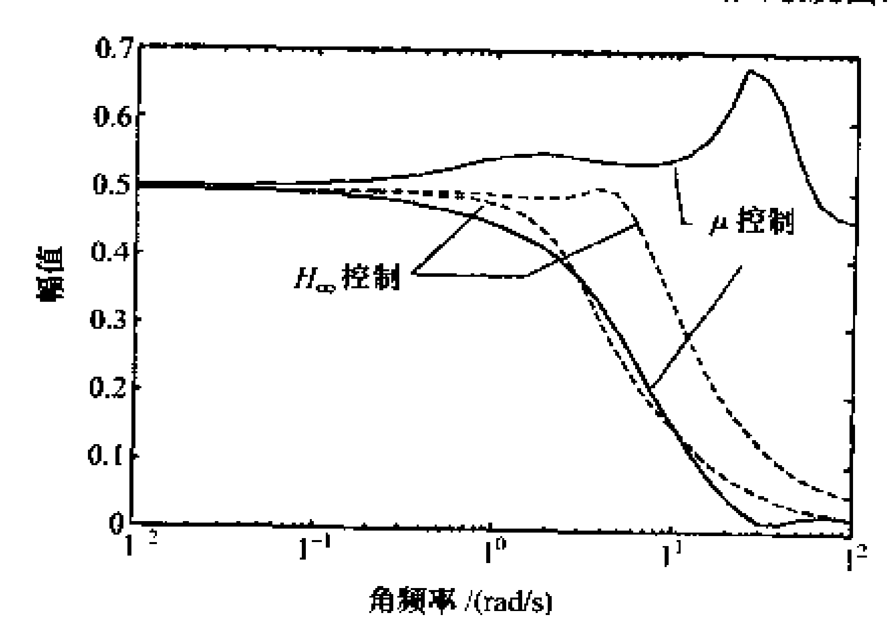


图 11.17 两种控制律下闭环系统的加权输入补灵敏度曲线

从无摄动情形到有摄动情形下的输入灵敏度曲线来看，用 H_∞ 控制器的系统，当引入微小摄动时，性能显著下降；而 μ 控制器的系统则没有明显变化。因此这个品质的好坏与闭环系统的 μ 值有关。从图中我们还可以看出 μ 控制律的 μ 值比 H_∞ 控制律的 μ 值小得多。

从条件数来看，H_∞ 控制器的系统的条件数比 μ 控制系统要高近 100 倍，由于高条件数的控制器和系统对于摄动的引人是非

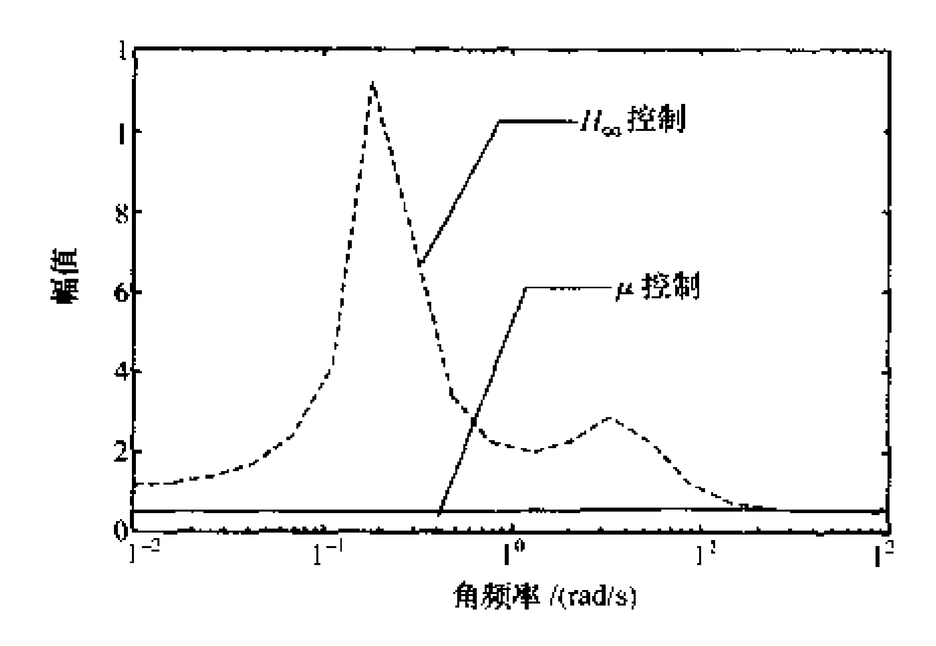


图 11.18　摄动时闭环系统加权输出灵敏度曲线

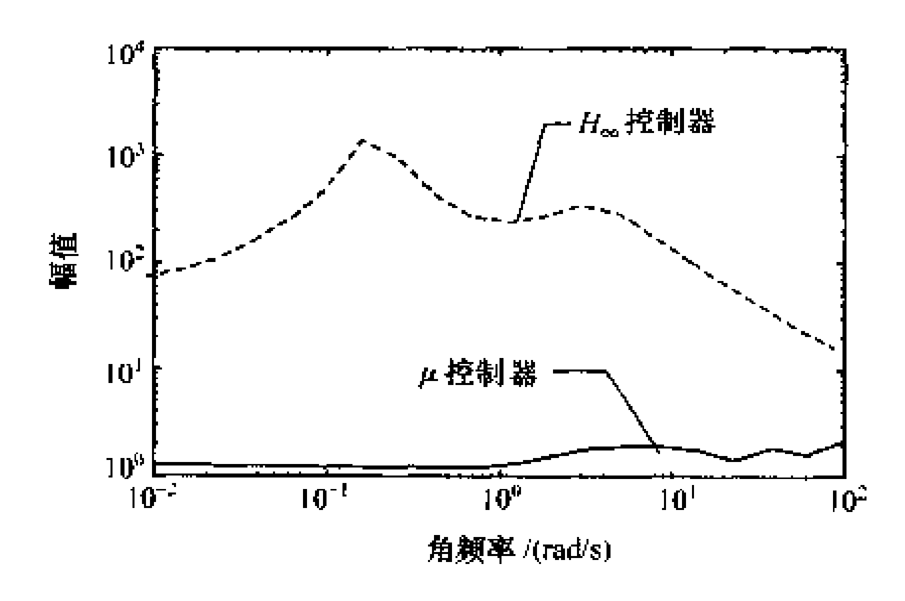


图 11.19　闭环系统的条件数

常敏感的,所以从输出灵敏度和输入补灵敏度曲线都可以看出 μ 控制律对输入的不确定性有更强的鲁棒性。

11.4.2　时间响应

从时间响应曲线（图 11.20、图 11.21）来看,选用相同的摄动,在 0 ~ 2s 的时间范围内,取采样间隔 0.01s,只有第一个阶跃输入的情况下,可以看出在输入信号上有一个微小摄动,H_∞ 控制器的性能就明显下降,而 μ 控制器没有明显变化。

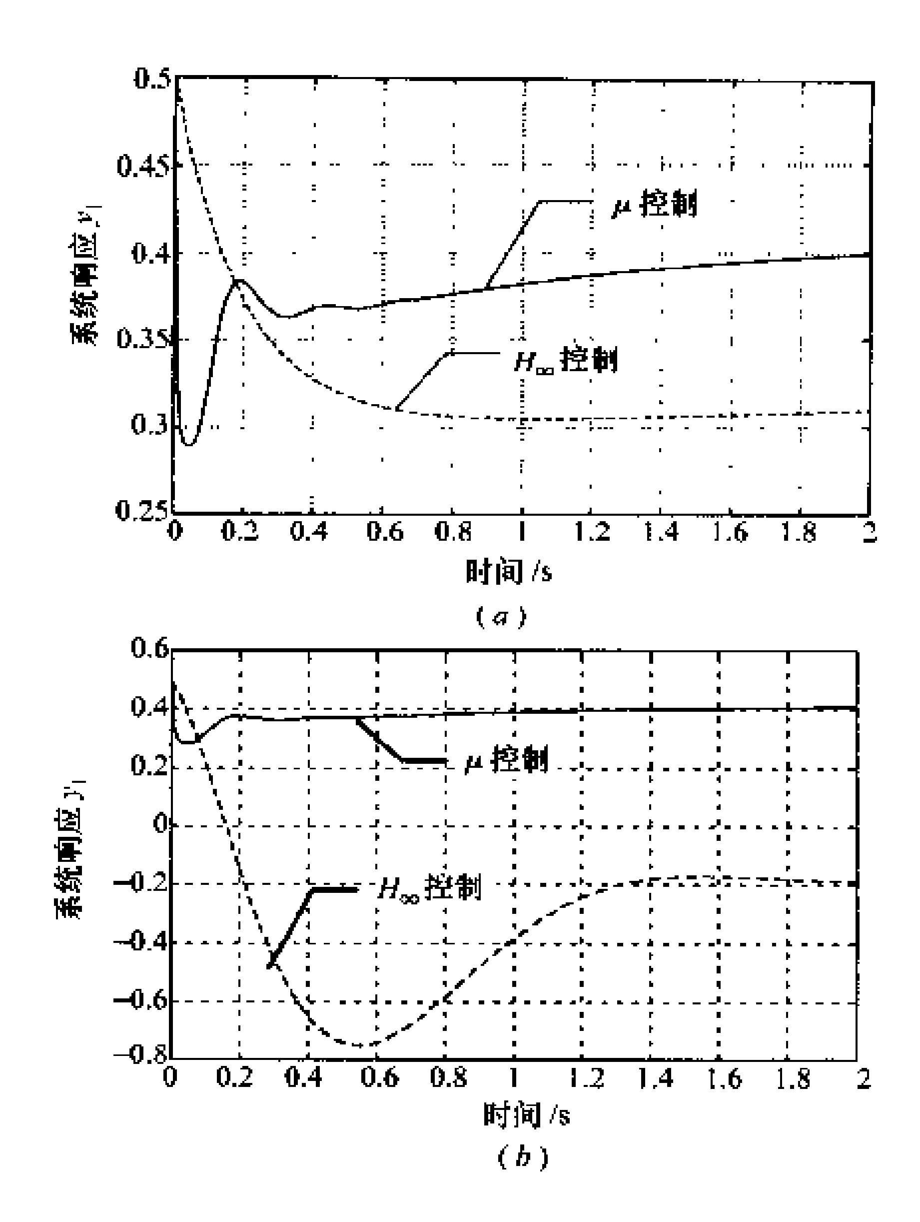


图 11.20　有摄动和无摄动时 y_1 的时间响应曲线

(a) 无摄动时；(b) 有摄动时。

从以上的仿真结果可以看出，奇异值在低频处要求高的假设，使传统鲁棒性能规则如 H_∞ 方法，具有很强的保守性，而 μ 控制器是基于 μ 理论得到的，所以它避免了其它传统控制器综合法所带来的保守性问题。于是鲁棒性约束可以放宽，每个奇异值可以在很大范围内变化。另外，注意到 μ 控制器的系统传递矩阵的最大奇异值比 H_∞ 控制器的系统的要大，这也同样是因为 μ 理论具有较少保守性，以至于标称系统的稳定性边界可以放大，同时保持较高的鲁棒稳定性。

从实际的例子我们知道，对于多变量系统控制器的分析与综

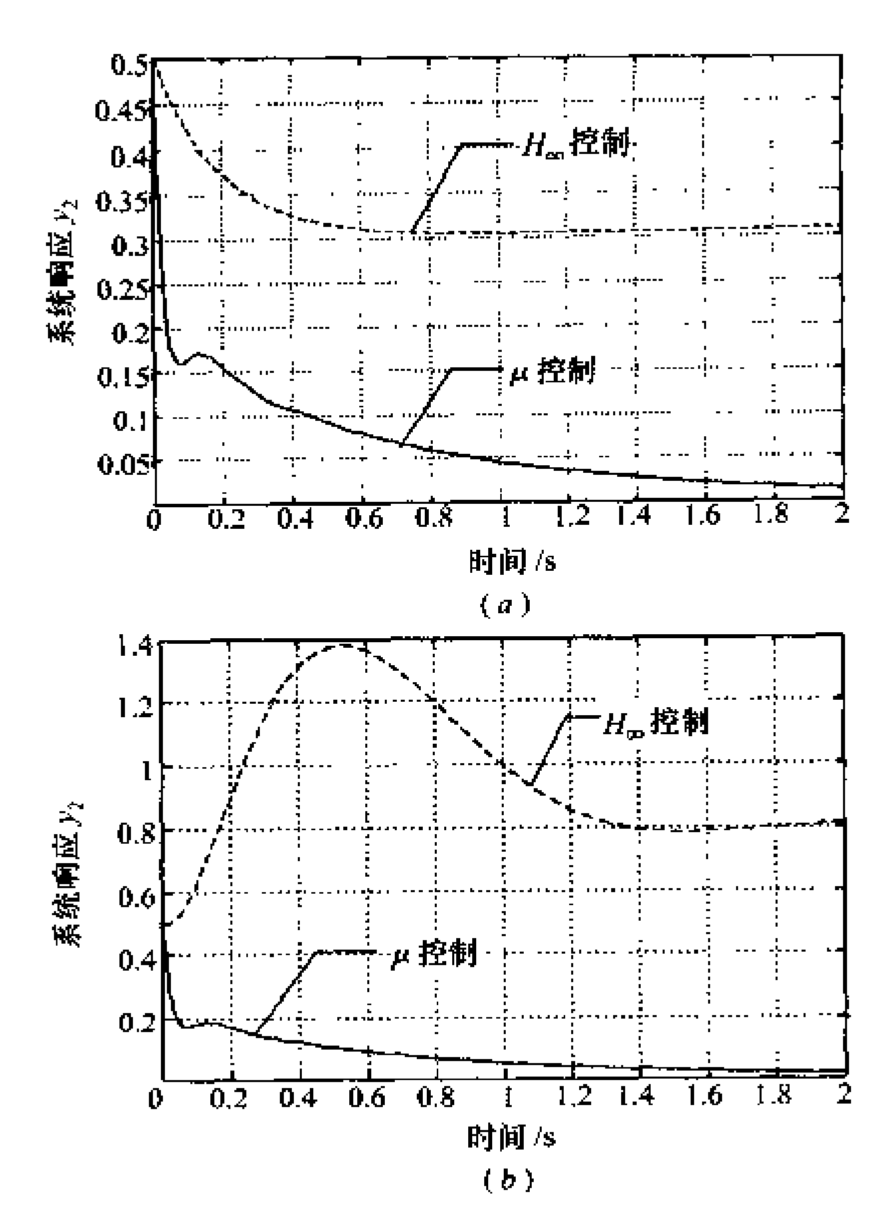


图 11.21　有摄动和无摄动时 y_2 时间响应曲线

(a) 无摄动时；(b) 有摄动时。

合方法，不仅要求它要考虑系统的标称性能，还要考虑系统的鲁棒稳定性和鲁棒性能。

在鲁棒性控制器设计的方法中，SSV 方法与其它方法相比，最重要的优点之一是其理论上不存在保守性，这使得在保证系统鲁棒性问题上具有优越性。

然而这种鲁棒性强的好处是在牺牲控制器阶数的前提下得到的，因此在工程实际应用中，设计低阶控制器的方法具有实际应用价值。

第 12 章　μ 控制器的平衡降阶法

12.1　μ 控制器工程不可实现的原因

1. μ 控制器阶次过高

从第 11 章的实际例子可以看出，一个四状态两输入两输出的受控系统（含有两个不确定性摄动块），如果用 3 阶多项式拟合尺度矩阵 $\boldsymbol{D}$，那么控制器 $\boldsymbol{K}_{\mu}(s)$ 的阶数会由原来 8 阶骤然增至 20 阶。这是因为拟合后，互联结构为 $\boldsymbol{DMD}^{-1}$，其增加的状态个数[28]为

$$拟合阶数 \times 全块的大小 \times 2 = 3 \times 2 \times 2 = 12$$

而计算机在处理低阶 SISO 模型（$n < 5$）时，通常对数字问题不敏感，一般不会遇到数字方面的困难，特别是使用 Matlab 工具时会给出精确的答案而不考虑所选择的模型或转换。对于高阶 MIMO 模型，计算机的有限精度算法就不太适应了。显然，这样高阶次的 μ 控制器在计算上和在实际应用中都有相当的困难，甚至是不可能实现的。

2. 用 μ 方法设计的控制系统条件数高

回顾系统矩阵的有关条件数概念[49,50]。由于线性方程组的数据总会有误差，因此在对其进行运算时，就会传播和积累误差。采用不同的算法对误差传播和积累的影响是不同的，而且可以有很大的区别。因此在选择算法时要考虑这个因素的影响；另一方面，方程组本身对误差的积累也起着重要作用。

我们称对误差特别敏感的矩阵为坏条件矩阵，对误差不敏感的矩阵称为好条件矩阵。若数据中小的变化仅引起结果中小的变

化，则称这个问题“为条件设置好的”；若数据中小的变化在结果中可能引起大的变化，则称问题是病态的，若要计算的值对数据的微小变化非常敏感，则称此计算问题为坏条件的(病态的)。一个算法是数值稳定的是指它对于扰不会导致比问题中固有的敏感性还要敏感。一个受微小扰动原问题的解在问题条件设置良好的情况下将接近“真实解”[42]。

衡量一个矩阵的条件好坏是用矩阵的条件数来刻画的。对于方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{12.1}$$

来说，向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 的范数之间所可能达到的最大比值，即 $\boldsymbol{A}$ 的范数

$$\| \boldsymbol{A} \| = \max_{x \neq 0} \frac{\| \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \|}{\| \boldsymbol{x} \|} \tag{12.2}$$

决定了矩阵的“放大作用”。

在解方程组时，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的误差以及右端项 $\boldsymbol{b}$ 的误差都会影响计算结果。

(1) 右端项 $\boldsymbol{b}$ 的误差对解的影响

假设 $\boldsymbol{b}$ 有误差 $\delta \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}$ 相应的解为 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{b} + \delta \boldsymbol{b}$ 相应的解为 $\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x}$，则解的相对误差

$$\frac{\| \delta \boldsymbol{x} \|}{\| \boldsymbol{x} \|} \leqslant \| \boldsymbol{A} \| \cdot \| \boldsymbol{A}^{-1} \| \cdot \frac{\| \delta \boldsymbol{b} \|}{\| \boldsymbol{b} \|} \tag{12.3}$$

(2) 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的误差对解的影响

类似于(1)，设 $\boldsymbol{A}$ 有误差 $\delta \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A}$ 相应的解为 $\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x}$，则解的相对误差为

$$\frac{\| \delta \boldsymbol{x} \|}{\| \boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x} \|} \leqslant \| \boldsymbol{A} \| \cdot \| \boldsymbol{A}^{-1} \| \cdot \frac{\| \delta \boldsymbol{A} \|}{\| \boldsymbol{A} \|} \tag{12.4}$$

综上所述，因子 $\| \boldsymbol{A} \| \cdot \| \boldsymbol{A}^{-1} \|$ 为解误差的放大率，它关系到解的精确性，如果其值很大，所得解可能很不精确，甚至面目全非。因此用 $\boldsymbol{A}$ 的条件数

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) = \| \boldsymbol{A} \| \cdot \| \boldsymbol{A}^{-1} \| \tag{12.5}$$

来表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件好坏。这个条件数决定由于高斯消元法中舍入误差造成的精度损失。

针对本书中所讨论的飞行控制的例子，从 μ 控制器的状态矩阵 A_{K_μ} 来看，它的元素在一个非常大的数值范围内，从 10^{-3} 级到 10^6 级，但困难不仅在于此，虽然 A_{K_μ} 的极点均在左半开平面，是一个稳定的控制器，但如果对 A_{K_μ} 做一个 10^{-8} 级的相对扰动，则会导致 A_{K_μ} 的极点移入右半平面内，这时的控制器就是不稳定的。可见 A_{K_μ} 是一个十分敏感的矩阵。

从 A_{K_μ} 的条件数可以看到 $\text{cond}(A_{K_\mu}) = 5.15e+11$。可见 A_{K_μ} 的特征值对于元素的微小扰动具有极端敏感性。所以 A_{K_μ} 是坏条件矩阵。

另外，Matlab 中的一些工具并不都是稳定的算法，而且有些是解病态问题的。比如模型描述方式之间的转化这类工具。这些不可靠的工具对于低阶系统可以很好地工作，但当推导高阶问题时可能遇到数值困难。这些情况往往是十分严重的，会导致计算上的不稳定性、不可靠性。

从实现的角度来看，误差是不可避免的，因此有可能所设计的 μ 控制器是不稳定的，起不到使闭环系统满足鲁棒稳定性和性能鲁棒性的条件的目的。

综上所述，在实际应用中，得到一个稳定的、条件好的且低阶的控制器是很有必要的。显然，低阶控制器在计算量、实现上比高阶控制器要优越得多。

12.2 控制器降阶方法的选择

设计一个低阶控制器的方法大体可分两大类：固定阶控制器的设计和控制器模型降阶法的设计。

固定阶控制器的设计思想是使控制器在约束条件下，即控制器阶数固定，减小某个性能指标[26]。对于控制器模型降阶有很多简化技术，如时域的集结法、摄动法；频域的矩匹配法、Padé 近似法、Routh 近似法和连分式法等；鲁棒辨识的最小二乘法、极大似

然法等也可达到模型简化的目的。另外，基于状态空间的内部平衡截断法[21,22,53]、Hankel-范数近似法[54]、q 方差等价实现法[55]、互质因子法[56]等。在众多方法中，选择哪种方法要根据问题的实际情况来分析。

经过实践，得到如下结论：对于时域的集结法（即主导极点法），它认为最靠近虚轴的点是决定系统行为的主导特征值。因为在左半平面内，远离虚轴的点具有较小的时间常数，其动态过程很快便消失，在简化模型中可以忽略它们的动态影响。但事实上，简单地按照这一原则选取主导极点并不能得到很好的效果，这是因为极点离虚轴的远近仅仅考虑了衰减速度的快慢，而这些极点所对应的响应的振幅并没有考虑进去。Litz 提出了新的确定主导极点的方法，综合地考虑了响应振幅的影响[48]。然而，以上的方法对条件好的、阶数不太高的系统十分有效，但在本书所讨论的问题中，由于 μ 控制器的系统矩阵是坏条件矩阵且阶数高达 20，主导极点法需要计算特征值的倒数，因此在计算中引入了不容忽视的误差，造成了严重的数值不稳定性。所以这种降阶法不适用。

像频域的诸多方法都是以系统传递函数的形式为基础的，而对于本问题的坏条件情况下，$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{K}_\mu})^{-1}$ 会导致误差的放大，同时，矩阵的伴随式，或可控／可观测标准型通常比一般的状态空间型有条件更糟的特征系统，这意味着其特征值和特征向量对干扰更灵敏，对于高阶系统情况会变得更糟。处理高阶传递函数模型有很大的数值冒险性，会使数值不稳定，因此基于传递函数形式的方法在本书所讨论的问题中也是不可取的。

同样，鲁棒辨识的最小二乘法在数值计算中也存在类似数值不稳定的缺点。

因此，对于高阶的、坏条件的、状态空间形式的控制系统，降阶应采用以状态空间为基础的方法，避免 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{K}_\mu})^{-1}$ 的计算，仅仅是 $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{K}_\mu}$ 的代数运算。

内部平衡截断法正好能满足这些要求。另外 Hankel-范数近似法、q 方差等价实现法、互质因子法都是比较好的选择。本书以内

部平衡截断法为例来说明控制器降阶的实现。

12.3 内部平衡截断法

20世纪80年代初，由Moore提出的用可控可观测矩阵的某种量测作为模型降阶的一种工具[22]。降低模型阶数的一种非常自然的方法是去掉模型中不可控不可观测的部分，这个部分通常是结构上的不稳定部分。但实际上，由于任意一个系统从某种意义上来看总是可控可观测的，而且在状态空间上不同子空间的可控可观测性所达到的程度不同，因此人们通过测量状态空间上某一子空间的可控可观测性来衡量，可控性和可观测性程度最大的部分就可用来作为低阶模型的近似。

Moore用可控可观测性的grammian阵来定义状态空间某个方向上的可控可观测性的量度。由于Grammian阵在坐标变换下仍保持不变，因此总存在着一个坐标变换系统，在这个方向上使可控Grammian阵和可观测Grammian阵保证相等，且是可对角化的，则称在这个坐标下的系统为平衡系统(balanced system)。去掉对应于可控可观测性Grammian阵中对角元素值相对小的状态变量，得到的系统就是降阶系统，这就是Moore平衡截断法(balanced realization truncation)的主要思想。

12.3.1 平衡系统的性质

对于下面描述的系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax = Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\right\} \tag{12.6}$$

是连续的多变量系统。假定它是可控可观测的、渐近稳定的，并且在区间[0,∞]上是平衡的，则该系统有如下性质：

性质12.1 该系统的可控可观测Grammian阵是非奇异的，并且等于某个对角阵Σ^2，Σ^2是下面两个李亚普诺夫方程的惟一正定解

$$\boldsymbol{A\Sigma}^2 + \boldsymbol{\Sigma}^2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}} \tag{12.7}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^2 = -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} \tag{12.8}$$

引理 12.1　假定系统 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 对于某个正定阵 P,满足李亚普诺夫方程

$$\boldsymbol{AP} + \boldsymbol{PA}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}} \tag{12.9}$$

则该系统渐近稳定的充要条件是该系统应是可控的。如果该系统不是渐近稳定的,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值不在左半开平面内,而在虚轴上。

定理 12.1　一个平衡系统是满足下面条件的

$$\| \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \| < 1, t > 0 \tag{12.10}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是谱范数。

将系统(12.6)分块为

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= [\boldsymbol{C}_1 \quad \boldsymbol{C}_2]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{12.11}$$

$\boldsymbol{\Sigma}$ 分块为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2)$$

并且 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的元素没有按照顺序排列,则方程(12.7)、(12.8)可写为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1^2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1^2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}[\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}] \tag{12.12}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1^2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1^2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_3^2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}[\boldsymbol{C}_1 \quad \boldsymbol{C}_2] \tag{12.13}$$

Moore 在文献[22]中还指出两个子系统$(\boldsymbol{A}_{ii},\boldsymbol{B}_i,\boldsymbol{C}_i)(i=1,2)$都是渐近稳定的,它们有下列推论。

推论 12.1　如果 Σ 是具有互异奇异值的,则两个子系统是渐近稳定的,并且满足

$$\int_0^{\infty} e^{A_{11}t} B_1 B_1^T e^{A_{11}^T t} dt = \int_0^{\infty} e^{A_{11}t} C_1^T C_1 e^{A_{11}^T t} dt = \Sigma_1^2$$

$$\int_0^{\infty} e^{A_{22}t} B_2 B_2^T e^{A_{22}^T t} dt = \int_0^{\infty} e^{A_{22}t} C_2^T C_2 e^{A_{22}^T t} dt = \Sigma_2^2$$

推论 12.2 模型降阶过程总是给出了一个渐近稳定的、可控的、可观测的低阶近似模型。

12.3.2 平衡系统的获得

对于线性定常连续时间系的状态空间模型

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{12.14}$$

其中 A 是 $n \times n$ 维，B 是 $n \times r$ 维，C 是 $m \times n$ 维，D 是 $m \times r$ 维。

假设 A 的特征值严格在左半平面内，定义系统(12.14)的可控 Grammian 阵 P 和可观测 Grammian 阵 Q 为

$$P = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \tag{12.15}$$

$$Q = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \tag{12.16}$$

且 P、Q 满足下列李亚普诺夫方程

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \tag{12.17}$$

$$A^T Q + QA + C^T C = 0 \tag{12.18}$$

并且有如下性质：

性质 12.2 如果 A 的特征值严格在左半平面，则

(1) $P > 0$，当且仅当(A, B)是完全可控的。

(2) $Q > 0$，当且仅当(A, C)是完全可观测的。

因为内部响应 $e^{At}B$，$e^{A^T t}C^T$ 与内部协调系统有关，这是解决问题的关键。它说明除非有某个特殊的重要性与内部协调系统相联系，在 $e^{At}B$ 或 $e^{A^T t}C^T$ 中“小元素”的出现意味着它们对模型的输入/输出特性不起关键作用。

如果存在某非奇异变换阵 T，使系统的状态空间坐标变为

$$z = T^{-1}X$$

则原系统变为

$$\left.\begin{aligned}\dot{z} &= T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \hat{A}z + \hat{B}u \\ y &= CTz + Du = \hat{C}z + \hat{D}u\end{aligned}\right\} \tag{12.19}$$

显然 $e^{\hat{A}t}\hat{B} = T^{-1}e^{At}B, \hat{C}e^{\hat{A}t} = Ce^{At}T$。更进一步，可控性 Grammian 阵 P 和可观测性 Grammian 阵 Q 转换为 $T^{-1}P(T^{\mathrm{T}})^{-1}$ 和 $T^{\mathrm{T}}QT$，PQ 转换为 $T^{-1}PQT$。因此在 T 变换下，PQ 的特征值不变，输入/输出不变。如果 $T^{-1}P(T^{\mathrm{T}})^{-1} = T^{\mathrm{T}}QT = \Sigma^2$，且 Σ^2 可对角化，则新系统为内平衡系统(internal balanced system)。

因此，问题的关键是找到一个合适的变换阵 T，使系统实现(12.19)是内部平衡，即系统(12.19)的可控、可观测 Grammian 阵 $\hat{P}, \hat{Q}$ 满足下列李亚普诺夫方程：

$$\hat{A}\hat{P} + \hat{P}\hat{A}^{\mathrm{T}} + \hat{B}\hat{B}^{\mathrm{T}} = 0 \tag{12.20}$$

$$\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{Q} + \hat{Q}\hat{A} + \hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{C} = 0 \tag{12.21}$$

$$\hat{P} = \hat{Q} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_n^2)$$

且

$$\hat{P}\hat{Q} = \mathrm{diag}(\sigma_1^4, \sigma_2^4, \cdots, \sigma_n^4)$$

去掉 $\hat{P}$、$\hat{Q}$ 中对角元素小的所对应的状态变量，则得到降阶模型。

在给出求变换矩阵 T 的方法之前，先介绍主元分析(principal component analysis)的概念。

令 $F: R \rightarrow R^{n\times m}$ 是分段连续映射，可用矩阵形式 $F(t)$ 来表示。我们可以认为 $F(t)$ 是包含 m 个 n 维向量的信号集合，即每一列表示 R^n 中一个向量信号，则 Grammian 阵

$$W = \int_{t_1}^{t_2} F(t)F^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t$$

是一个半正定矩阵，具有非负实特征值 $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n^2 > 0$，相应的正交单位特征向量为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$。它们可看作 R^n 上的正交基向量，则映射 F 可表达为

$$F(t) = v_1 f_1^{\mathrm{T}}(t) + v_2 f_2^{\mathrm{T}}(t) + \cdots + v_n f_n^{\mathrm{T}}(t)$$

其中 $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}}(t) \triangleq \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t)$。对于 $1 \leqslant i \leqslant n$,有如下定义:

主元素(principal component) $\triangleq \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}}(t)$;

元素向量(component vetor) $\triangleq \boldsymbol{v}_i$;

元素幅值 $\triangleq \boldsymbol{\sigma}_i$;

元素函数向量 $\triangleq \boldsymbol{f}_i(t)$。

为了便于说明,作如下解释:

(1) 令 $\boldsymbol{V}_c = (\boldsymbol{v}_{c1}, \boldsymbol{v}_{c2}, \cdots, \boldsymbol{v}_{cn})$;$\boldsymbol{\Sigma}_c = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\sigma}_{c1}, \boldsymbol{\sigma}_{c2}, \cdots, \boldsymbol{\sigma}_{cn})$。其中 $\boldsymbol{v}_{ci}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_{ci}$ 分别表示 $\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{B}$ 第 i 个元素向量和元素幅值。

(2) 令 $\boldsymbol{V}_o = (\boldsymbol{v}_{o1}, \boldsymbol{v}_{o2}, \cdots, \boldsymbol{v}_{on})$;$\boldsymbol{\Sigma}_o = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\sigma}_{o1}, \boldsymbol{\sigma}_{o2}, \cdots, \boldsymbol{\sigma}_{on})$。其中 $\boldsymbol{v}_{oi}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_{oi}$ 分别表示 $\mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}t}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 第 i 个元素向量和元素幅值。

如果选择 $\boldsymbol{T}$ 使协调系统的 $\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{B}$ 元素具有单位幅值,即 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{I}$,这样 $\mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}t}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 的小元素不会因 $\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{B}$ 的大元素改变导致偏移。因为 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{V}_c\boldsymbol{\Sigma}_c^2\boldsymbol{V}_c^{\mathrm{T}}$,显然这可以令 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{V}_c\boldsymbol{\Sigma}_c$ 得到。令 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}$,其中

$$\boldsymbol{H} \triangleq \boldsymbol{\Sigma}_o\boldsymbol{V}_o^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_c\boldsymbol{\Sigma}_c$$

注意到 $\boldsymbol{H}$ 的奇异值是 $\mathrm{e}^{\hat{A}^{\mathrm{T}}t}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$的元素幅值。尽管 $\boldsymbol{H}$ 与初始协调系统有关,但很容易证明其奇异值并非如此。这些值反映了系统的输入/输出 特性,它们在下面的讨论中扮演非常重要的角色。

定义 12.1 $\boldsymbol{H}$ 的奇异值可表示为$\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n^2 > 0$,它被认为是系统的二次模式(second - order modes)。

显然 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{I}$ 并没有定义惟一的协调系统。下面给出三个关系紧密的协调系统。

定义 12.2 令 $\boldsymbol{\Sigma}^2 = \mathrm{diag} = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_n^2)$ (12.22)

如果 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{\Sigma}^4$ 则模型$(\hat{\boldsymbol{A}}, \hat{\boldsymbol{B}}, \hat{\boldsymbol{C}})$ 是输入正则(input-normal);当 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{\Sigma}^4, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{I}$,则模型$(\hat{\boldsymbol{A}}, \hat{\boldsymbol{B}}, \hat{\boldsymbol{C}})$ 在 $[0, T]$ 上是输出正则(output-normal);当 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{\Sigma}^2$ 时,则模型$(\hat{\boldsymbol{A}}, \hat{\boldsymbol{B}}, \hat{\boldsymbol{C}})$ 为内平衡的(internal balanced)。

令 T_{ib}是使系统(12.14)进行平衡实现的转换矩阵,很容易证明 $T_{on} = T_{ib}\Sigma^{-1}$,$T_{in} = T_{ib}\Sigma$,它们分别给出了输出正则与输入正则模式。因此这三个协调系统只是由标量系数简单地联系在一起。令 $\text{cond}_c(T)$,$\text{cond}_o(T)$ 分别是 $P(T)$、$Q(T)$ 的条件数。如 Moore 在其文献中所述,$\text{cond}_c(T)$,$\text{cond}_o(T)$ 是逐点状态控制和零输入状态观测时模型($\hat{A}$,$\hat{B}$,$\hat{C}$)的条件数。下面的结论表明,在某种意义下,内部平衡模型提供了两个条件数最好的折中。

定理 12.2 当 $T = T_{ib}$,则 $\max(\text{cond}_c(T),\text{cond}o(T))$ 达到最小值。

定理 12.3 如果(12.22)是互异的,则确定内平衡模型的基向量是惟一的,且其对角元素为 ±1。

这是因为 $\hat{A}$,$\hat{B}$,$\hat{C}$ 是内平衡的,则 $P = Q = \Sigma^2$,并假设 T 满足 $P(T) = Q(T) = \Sigma^2$。这说明

$$T^{-1}\Sigma^2(T^{\mathrm{T}})^{-1} = T^{\mathrm{T}}\Sigma^2 T = \Sigma^2$$

更进一步说明 $T^{-1}\Sigma^4 T = \Sigma^4$。这些方程限制了 T 是一个对角矩阵,且 +1 在每个对角元素上。

变换矩阵 T 可通过下面算法得到:

第一步:计算 V_c,Σ_c 并计算变换 $T_1 = V_c\Sigma_c$,使 $P(T_1) = I$。

则

$$\widetilde{A} = T_1^{-1}AT_1$$

$$\widetilde{B} = T_1^{-1}B$$

$$\widetilde{C} = CT_1$$

第二步:计算 $e^{\widetilde{A}^{\mathrm{T}}t}\widetilde{C}^{\mathrm{T}}$ 的元素向量 $\widetilde{V}_o$ 和幅值 $\widetilde{\Sigma}_o$,对($\widetilde{A}$,$\widetilde{B}$,$\widetilde{C}$)应用转换

$T_2 = \widetilde{V}_o\widetilde{\Sigma}_o^{-1/2}$,则 $T = T_1T_2$,得到内部平衡模型

$$\left.\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y &= \hat{C}\hat{x}\end{aligned}\right\} \qquad (12.23)$$

其中 $\hat{A} = T_2^{-1}T_1^{-1}AT_1T_2$;$\hat{B} = T_2^{-1}T_1^{-1}B$;$\hat{C} = CT_1T_2$。

模型降阶的基本思想就是根据推论 12.1,在 $\sigma_k^2 \gg \sigma_{k+1}^2$ 的情况下,在某种意义上子空间

$$x_1 \triangleq \mathrm{im}\begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

如同 x_c 和 $x_o^{\perp}$,将卡尔曼的最小实现理论应用于内部平衡模型 x_1 上作为 x_{co},则得到低阶模型(A_{11}, B_1, C_1),它是渐近稳定的、内平衡的。

可见模型降阶包含了模型阶数与由模型所反映的系统性能的程度之间的折中,其关键是去掉弱系统,它对脉冲响应不起什么作用。换句话说,通过内部平衡协调交换重组一个全阶模型(如图 12.1)。这就定义了一个"占优"系统,它是其脉冲响应与全阶系统极相似的子系统。这个"占优"子系统就是所求的低阶模型。

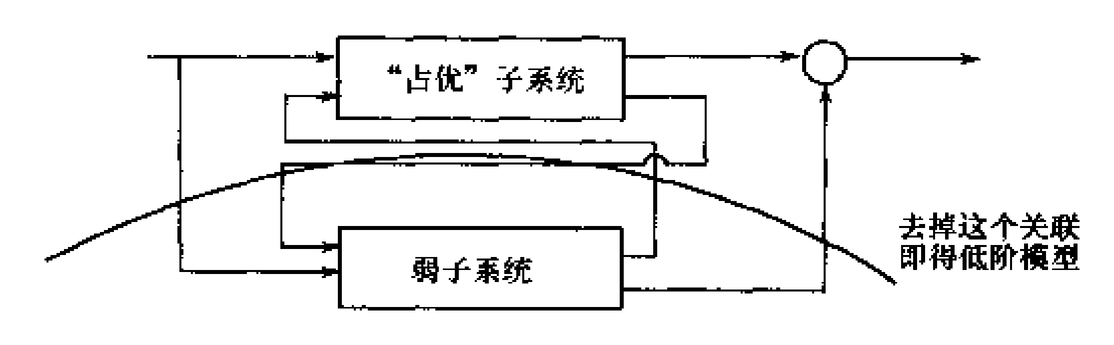


图 12.1 低阶模型的获得

12.4 带有平衡实现降阶技术的 μ 控制器设计

12.4.1 设计步骤

(1) 首先如第 10 章所述,经过几次 D-K 迭代后获得使系统鲁棒性达到要求的高阶控制器 K_μ。

(2) 根据系统主导极点估计出低阶控制器的阶数 $\bar{n}$。这里采

用 Lite 提出的确定主导极点个数的方法[41,48]。其具体作法如下。

设一连续线性系统的方程为

$$\dot{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{12.24}$$

其中状态变量 $\boldsymbol{x} \in R^n$,输入向量 $\boldsymbol{u} \in R^p$,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为具有适当维数的状态矩阵。

对变量 $\boldsymbol{x}$ 作若当变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{z} \tag{12.25}$$

则(12.24)变为

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} \tag{12.26}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵,$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{\bar{n}}, \lambda_{\bar{n}+1}, \cdots, \lambda_n\}$,$\bar{n}$ 为主导极点的个数,即降阶后系统的阶数。将(12.26)分块为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{z}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Lambda}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_1 \\ \boldsymbol{G}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

则(12.26)式可分成主导模式和非主导模式:

$$\dot{\boldsymbol{z}}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_1 \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{u} \qquad (\text{主导模式})$$

$$\dot{\boldsymbol{z}}_2 = \boldsymbol{\Lambda}_2 \boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{G}_2 \boldsymbol{u} \qquad (\text{非主导模式})$$

设 $\boldsymbol{x}_1 = [\boldsymbol{V}_{11} \quad \boldsymbol{V}_{12}]\boldsymbol{z}$,由 $\boldsymbol{z} = (s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{u}(s)$ 得

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{V}_{11} \quad \boldsymbol{V}_{12}](s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{u}(s)$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{\bar{n}1} & v_{\bar{n}2} & \cdots & v_{\bar{n}n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s-\lambda_1)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (s-\lambda_n)^{-1} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{\bar{n}1} & \lambda_{\bar{n}2} & \cdots & \lambda_{\bar{n}n} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s-\lambda_1}\sum_{i=1}^{p} g_{1i}u_i \\ \vdots \\ \dfrac{1}{s-\lambda_n}\sum_{i=1}^{p} g_{ni}u_i \end{bmatrix}$$

当第 j 个输入为阶跃输入时，$u_j(s) = 1/s, u_k(s) = 0, k \neq j$ 则第 i 路输出的拉氏变换 $x_{1ij}(s)$ 应为

$$x_{1ij}(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{v_{ik}}{s-\lambda_k} g_{ki} \frac{1}{s}$$

其逆变换为

$$x_{1ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{v_{ik}g_{kj}}{\lambda_k}(e^{l_k t} - 1)$$

上式中由极点 λ_k 引起的动态项记为 s_{ikj}，则

$$s_{ikj} = \frac{v_{ik}g_{kj}}{\lambda_k}(e^{l_k t} - 1) \tag{12.27}$$

式(12.27)既包含了衰减的快慢 $e^{l_k t}$，也包含了响应的振幅 $\frac{v_{ik}g_{kj}}{\lambda_k}$，这两者都与 λ_k 有关。将由 λ_k 引起的响应项的振幅记为 c_{ikj}，

$$c_{ikj} = \frac{v_{ik}g_{kj}}{\lambda_k}$$

则 $|c_{ikj}|$ 可作为衡量 λ_k 引起的动态项的大小的标准，因为对于负的 λ_k，$(e^{l_k t} - 1)$ 具有一定的上下界，即

$$|e^{l_k t} - 1| \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t < \infty$$

在式(12.27)中，由于 λ_k 在分母上，故随着 λ_k 的增加，$|c_{ikj}|$ 将减小。当 v_{ik} 或 g_{kj} 为零时，无论 λ_k 离虚轴多远，系统的第 j 路输入对于第 i 路输出却起不了作用，因为此时 $c_{ikj} = 0$。当 $v_{ik} = 0$ 时，说明系统第 i 个状态变量对于第 k 个输入是不可观测的；当 $g_{kj} = 0$ 时，说明系统第 j 个输入对于第 k 个变量是不可控的。于是，以 c_{ikj} 作为衡量标准既考虑了极点在复平面的位置，也考虑了系统的可观测和可控性。

对于 p 个输入变量，$\overline{n}$ 个基本状态变量的情况，共有 $p\times\overline{n}$ 路输入／输出传递关系，每一路都有 n 个“主导指标” $|c_{ikj}|$；对应于 n 个极点，以下列两个判据作为衡量主导极点的指标并称之为主导度量：

$$\left.\begin{aligned} M_k &= \max_{i=1,\cdots,\overline{n}}\left(\max_{j=1,\cdots,p}|c_{ikj}|\right),k=1,2,\cdots,n \\ S_k &= \sum_{i=1}^{\overline{n}}\sum_{j=1}^{p}|c_{ikj}|,k=1,2,\cdots,n \end{aligned}\right\}$$

第一个判据是对于 p 个阶跃输入、$\overline{n}$ 路响应的 $p\times\overline{n}$ 个系数 $|c_{ikj}|$ 进行比较，取其中最大的一个作为衡量 λ_k 的主导度量的标准；第二个判据是对于上述 $p\times\overline{n}$ 个系数 $|c_{ikj}|$ 进行求和，将所得的和作为衡量 λ_k 的主导度量的依据。对于不同的极点 λ_k，主导度量 M_k 或 S_k 可能相差很悬殊，M_k 或 S_k 而较小的模式却是非主导模式，因而可以在简化的模型中略去。因此，M_k 和 S_k 判据是选出需要保留的 $\overline{n}$ 个特征值的非常有力的工具。

所以确定高阶模型的简化模型的阶数 $\overline{n}$，可用下面图 12.2 所示的计算流程图来描绘其算法。

(3) 应用 12.3.2 小节所介绍的平衡实现截断法，将原高阶系统转换成一个内平衡实现的系统。在该平衡实现系统中选取 $\overline{n}$ 个状态，即得低阶模型。

第(1)、(2)、(3) 步可用图 12.3 所示的流程图来表示。

12.4.2 仿真结果与分析

仍然以第 11 章的纵向飞机控制系统设计为例。

(1) 低阶模型阶数的选取 $\overline{n}$ 约为 5。

(2)5 阶控制器为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\overline{\boldsymbol{x}}} &= \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{x}}+\overline{\boldsymbol{B}}\,\boldsymbol{u} \\ \overline{\boldsymbol{y}} &= \overline{\boldsymbol{C}}\overline{\boldsymbol{x}}+\overline{\boldsymbol{D}}\,\boldsymbol{u} \end{aligned}\right\} \tag{12.28}$$

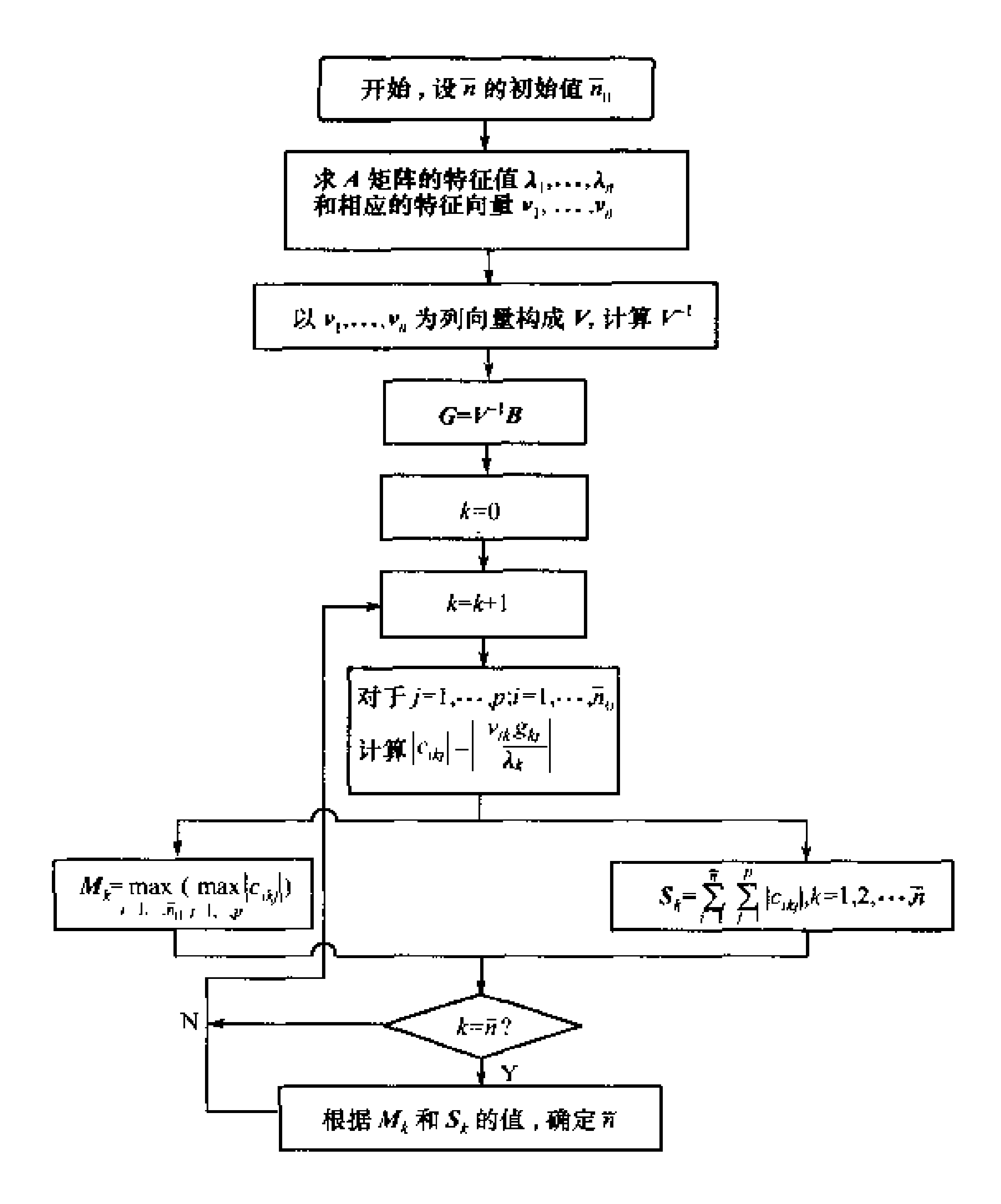


图 12.2　确定简化模型阶数 $\bar{n}$ 的流程图

其中

$$\bar{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} -5.49e-01 & -2.04e+00 & 3.37e+00 & 5.95e+01 & -1.38e+02 \\ -5.12e-01 & 3.87e+01 & 3.92e+01 & 1.03e+03 & -1.81e+02 \\ 1.42e+00 & -3.76e+02 & -3.55e+02 & 1.03e+03 & 9.63e+02 \\ -7.95e+00 & 6.53e+01 & 9.43e+01 & 1.51e+02 & -1.47e+03 \\ -7.69e+00 & 2.23e+02 & 4.35e+02 & 1.68e+03 & -5.19e+03 \end{bmatrix}$$

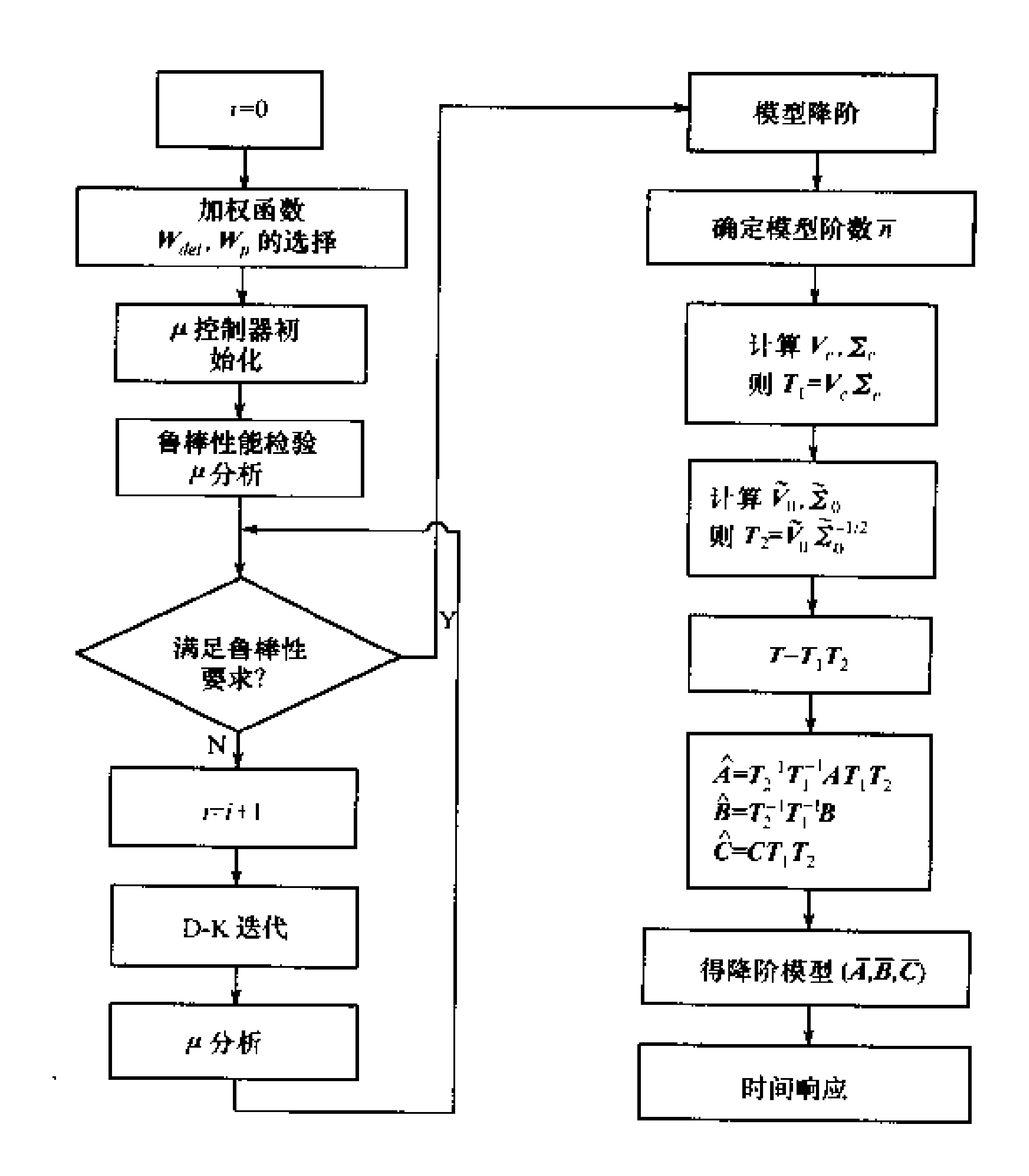


图 12.3　带有平衡实现的 μ 控制器设计

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} -6.12e-01 & -1.11e+00 \\ 1.09e+00 & -1.73e+00 \\ 9.24e+00 & 5.12e+00 \\ -9.99e-01 & 5.49e-01 \\ -7.70e-00 & -4.73e+00 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C}=\begin{bmatrix} -4.74e+00 & 4.54e+00 & 6.79e+01 & 6.38e+02 & -1.54e+03 \\ 7.97e-01 & 1.18e+01 & -1.68e+01 & -3.14e+02 & 5.25e+02 \end{bmatrix}$$

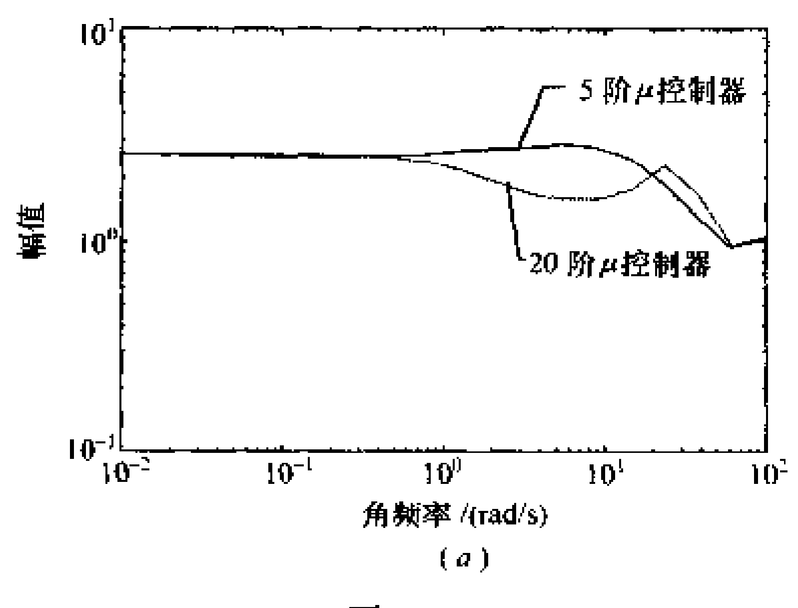
$$\overline{D}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

该低阶控制器的极点为表 12.1 所列。

表 12.1

实　部	虚　部
−3.1026e−002	0.0000e+000
−3.3320e−002	0.0000e+000
−2.8054e+002	−2.2443e+002
−2.8054e+002	2.2443e+002
−4.7932e+003	0.0000e+000

5 阶控制器与 20 阶控制器的控制效果相比，如图 12.4 所示。虽然在最大奇异值、μ 值、灵敏度函数等方面，5 阶控制器不如 20 阶控制器效果好，而且阶跃响应的振荡较大，但由于其 μ 值没有超过 1，且其有摄动时闭环系统的性能基本上没有很大的降低，所以这种 5 阶控制器的效果与 20 阶控制器的效果相近似。



(a)

图 12.4

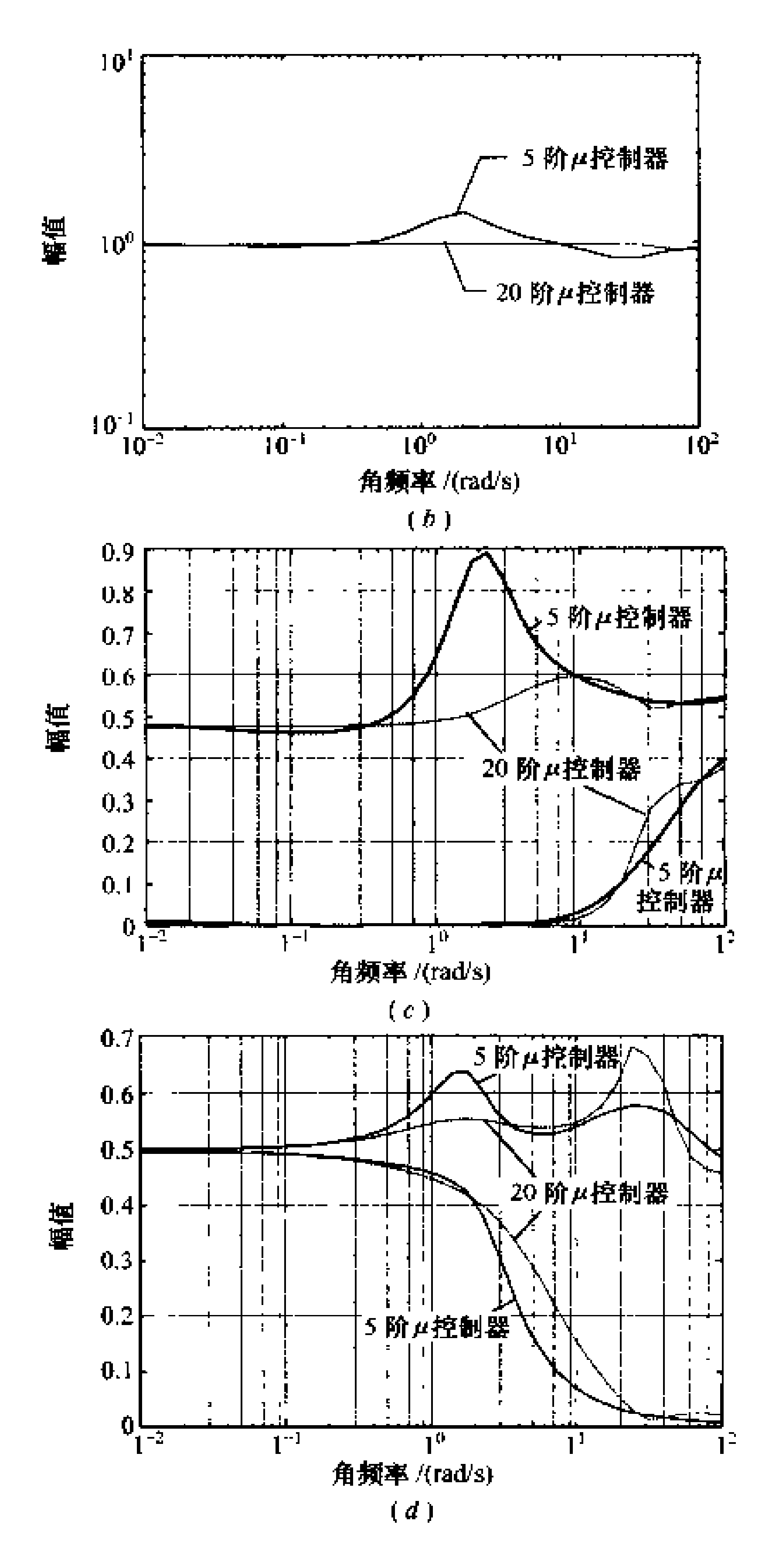
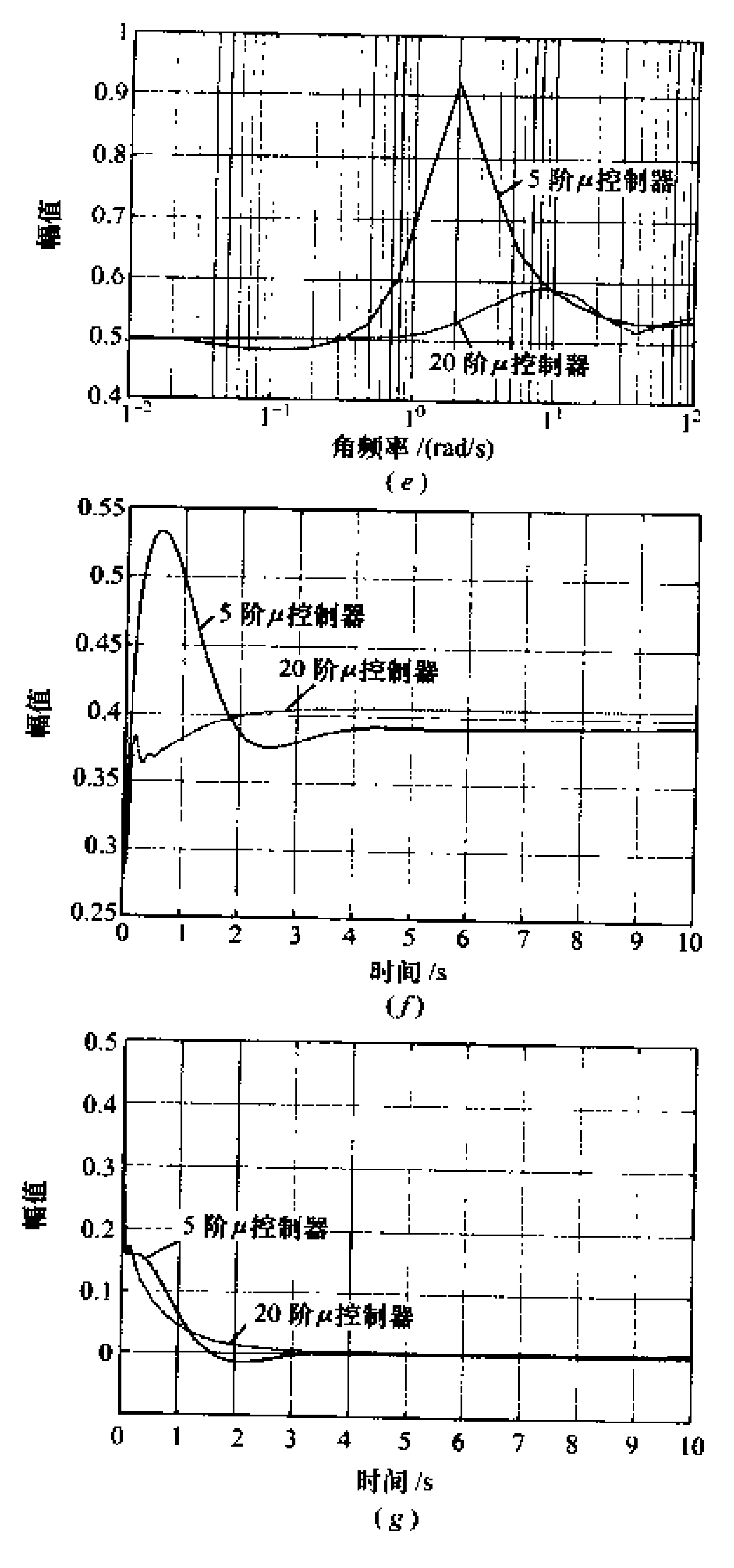

5 阶μ控制器
20 阶μ控制器
幅值
角频率 /(rad/s)
(b)
5 阶μ控制器
20 阶μ控制器
5 阶μ控制器
幅值
角频率 /(rad/s)
(c)
5 阶μ控制器
20 阶μ控制器
5 阶μ控制器
幅值
角频率 /(rad/s)
(d)

图 12.4



幅值
5 阶μ控制器
20 阶μ控制器
角频率 /(rad/s)
(e)
幅值
5 阶μ控制器
20 阶μ控制器
时间 /s
(f)
幅值
5 阶μ控制器
20 阶μ控制器
时间 /s
(g)

图 12.4

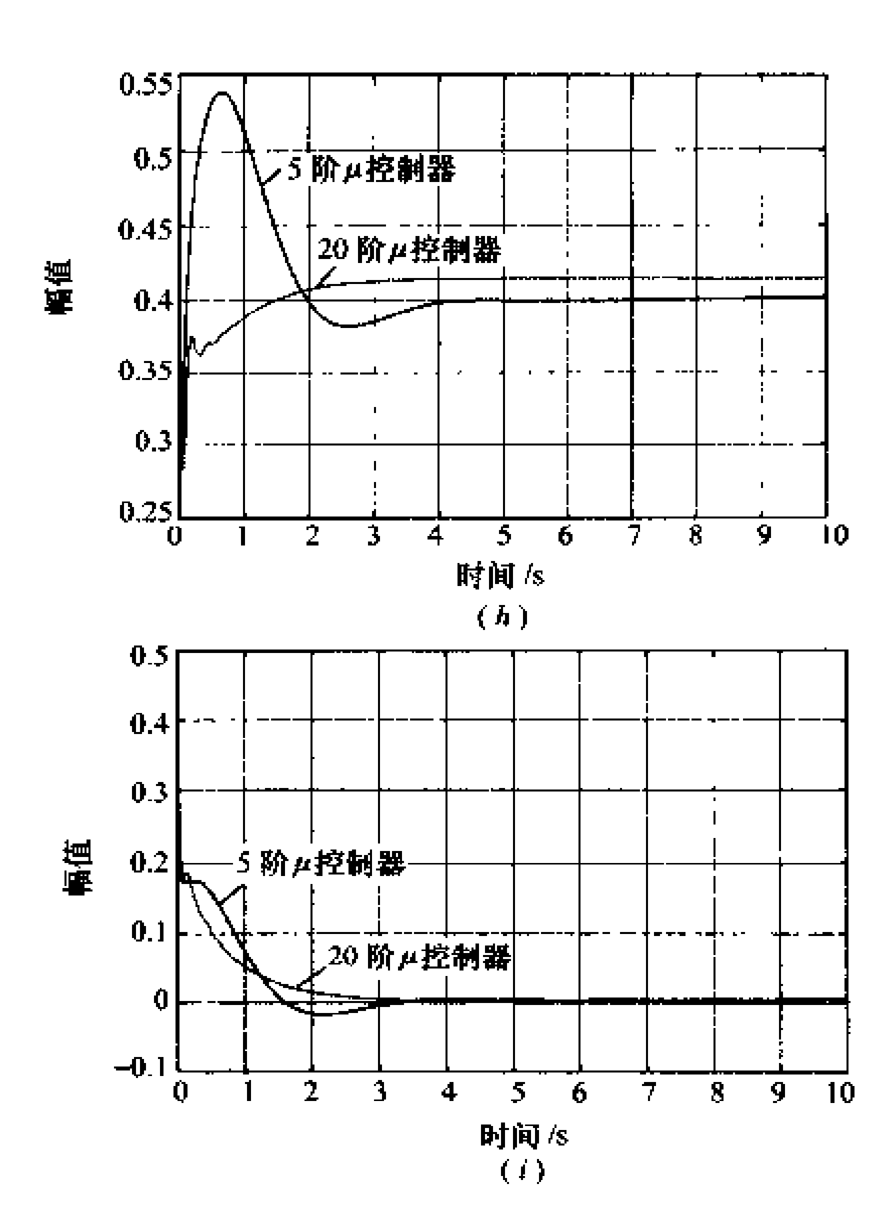


图 12.4　5 阶控制器与 20 阶控制器的比较

(*a*)20 阶与 5 阶 μ 控制器闭环系统的最大奇异值；

(*b*)20 阶和 5 阶 μ 控制器的闭环系统的 μ 值；

(*c*) 无摄动时 20 阶和 5 阶 μ 控制器系统的灵敏度；

(*d*) 无摄动时 20 阶和 5 阶 μ 控制器的补灵敏度函数；

(*e*) 摄动时 20 阶与 5 阶 μ 控制器闭环系统的灵敏度曲线；

(*f*) 无摄动时 20 阶和 5 阶 μ 控制器闭环系统的响应 y_1；

(*g*) 无摄动时 20 阶和 5 阶 μ 控制器闭环系统的响应 y_2；

(*h*) 摄动时 20 阶和 5 阶 μ 控制器闭环系统的响应 y_1；

(*i*) 摄动时 20 阶和 5 阶 μ 控制器闭环系统的响应 y_2。

可见这个 5 阶控制器是可行的。

如果取 $\bar{n}=4$,从下面闭环系统的 μ 值、无摄动和有摄动时闭环系统的阶跃响应,可以看出系统鲁棒性能下降了(图 12.5),所以在这里 4 阶控制器是不能满足性能要求的。

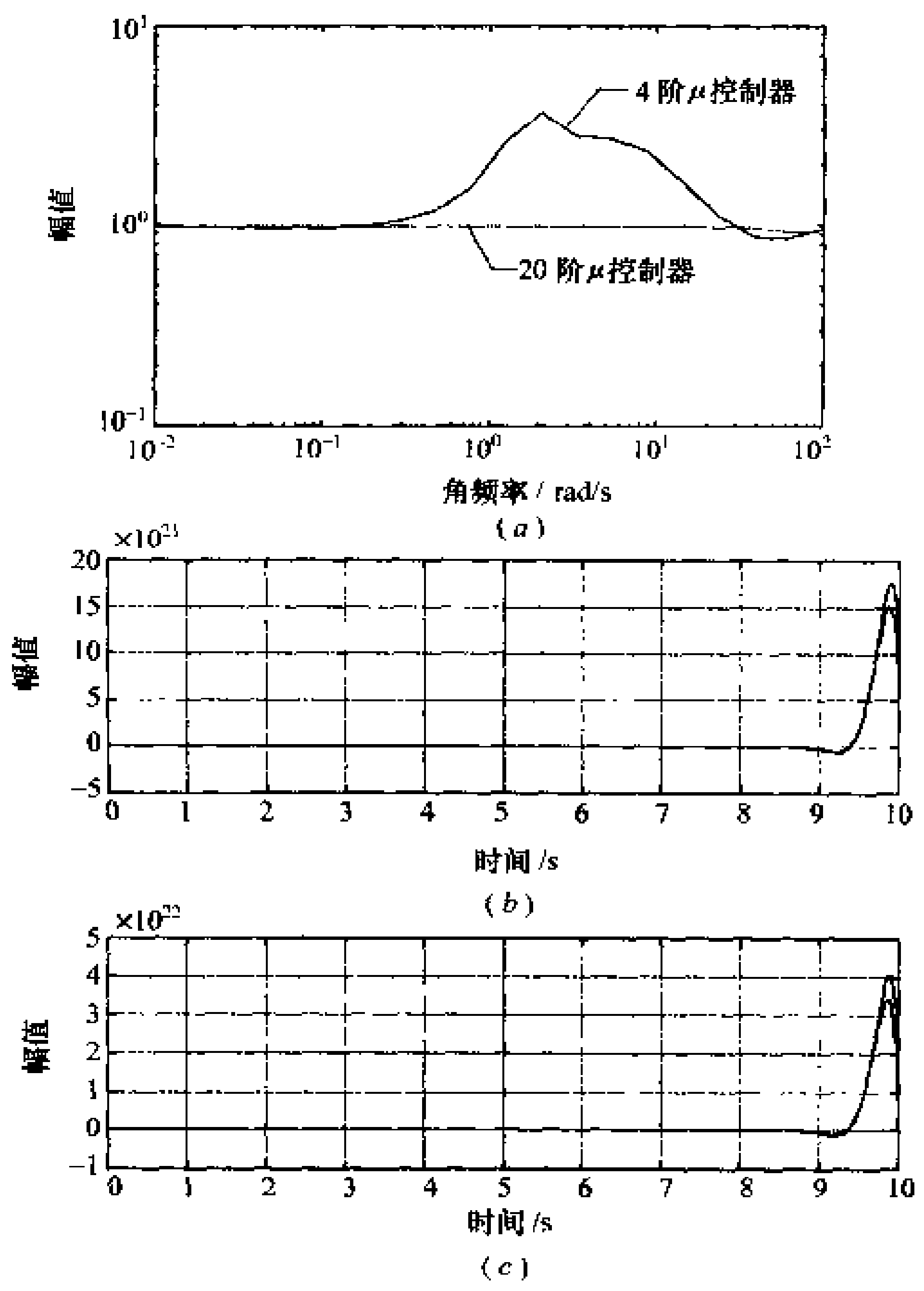


图 12.5　4 阶控制器与 20 阶控制器的比较

(a)20 阶和 4 阶 μ 控制器闭环系统 μ 的值;

(b) 无摄动时 20 阶和 4 阶闭环系统的阶跃响应;

(c) 摄动时 20 阶和 4 阶闭环系统的阶跃响应。

图12.5中，由于μ值远大于1，它不可能保证系统的鲁棒性。从阶跃响应来看，这个4阶控制器也不能保证系统的稳定性。所以本例中的20阶控制器不能降到4阶。5阶是它的最小实现。

本章通过采用平衡实现的方法不但使μ控制器阶数降低，而且仍然能保持系统原有的鲁棒性。通过几种模型降阶方法的比较，说明传统的模型降阶技术。由于算法本身只针对低阶系统而言，所以对于大系统来说，尤其是特征值十分敏感的系统，将会导致控制系统使原系统的性能急剧下降，甚至还会使整个系统发生严重的不稳定，而平衡实现法避免了常规算法对于大系统的弱点。通过可控、可观测Grammian阵的折中获得一种平衡实现，从而达到降阶且维持原系统性能不下降的目的。从仿真结果可看出，这种降阶方法对于解决强耦合作用的、特征值极为敏感的大系统来说是一种很好的方法。

12.5 μ方法的总结和展望

本书第9章至第12章以μ作为描述工具，主要研究了用其定量地评价多输入多输出控制系统的鲁棒稳定性和鲁棒性能的方法。与多变量控制方法中的H_∞优化控制方法相比，对于含有各类有界的参数和非参数不确定性的被控对象，结构奇异值方法无保守性地解决了鲁棒性问题。显然，μ分析方法比H_∞优化方法，甚至是古典控制理论中的增益裕度、相位裕度方法要更具有普遍性。μ分析不仅可以解决动态控制器$\boldsymbol{K}(s)$中的参数变化问题，还可以处理在被控对象模型中的不确定性以及回路中任何位置的参数摄动问题。一句话，在任何使闭环系统不稳定的情况下，μ分析能够定量地、无保守性地给出其稳定性和鲁棒性能的裕量。从仿真结果可以看出用μ综合的方法设计的控制器，不但能保证闭环系统的鲁棒稳定性，而且还能保证系统的鲁棒性能，这是其它多变量控制方法所不能及的，从而体现了μ综合的优越性。

从第9章至第12章的讨论可以看出，在μ综合的D-K迭代中，

由于使用高阶多项式拟合 $D(s)$ 曲线，这虽然带来效果很好的鲁棒性能，但同时不可避免地产生了高阶控制器。这样的高阶控制器便导致了在工程上不可实现的困难。在本书的纵向飞机控制 μ 综合的设计过程中，我们很明显地看到，一个3阶的 $D(s)$ 拟合导致了20阶的控制器。因此采用有效的控制器降阶方法，如平衡截断法，排除了 μ 方法在实际应用中的阴影。仿真结果证明，采用这种技术没有太多影响闭环系统的鲁棒性能，满足了设计的要求，这样的降阶是切实可行的。

在模型降阶时，第12章采用的是直接对控制器进行降阶的方法。更进一步仔细地分析，我们降低控制器阶数的目的一是为了工程实现上的便利；更重要的是要保证采用这个低阶控制器后的闭环系统与原来的闭环系统性能近似，至少不能下降性能。因此基于闭环系统的考虑而不单是控制器的近似将更符合设计的要求。这可以通过最小化以闭环系统为基础的某种性能指标，同时达到降低控制器阶数的目的。

考虑闭环系统的可控、可观测 Grammian 阵。由于平衡实现转换只是在标称对象和控制器的状态空间上起作用的，所以平衡实现技术不能用在整个闭环系统的可控、可观测 Grammian 阵上，因此将闭环系统的状态增广为 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_p \\ \boldsymbol{x}_c \end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{x}_p$ 是被控对象的 n 个状态，$\boldsymbol{x}_c$ 是控制器的 n_c 个状态。为了避免将系统的状态和控制器的状态混在一起，取下列结构的变换形式

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_{n_c} \end{bmatrix} \tag{12.29}$$

令 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 分别是闭环系统的可控、可观测 Grammian 阵，并定义性能指标(费用函数)。

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{PQ}$$

如果这个闭环系统能被平衡，也就是 $\boldsymbol{J}$ 能对角化，则相应于小的对角元素的状态变量就可以从系统中去掉。

将式(12.29) 的转换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 应用到闭环系统中,则 $\boldsymbol{J}$ 变成

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_{n_c}^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{J} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_{n_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_{n_c}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{J}_{12} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T}_{n_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{J}_{12}\boldsymbol{T}_{n_c} \\ \boldsymbol{T}_{n_c}^{-1}\boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{T}_{n_c}^{-1}\boldsymbol{J}_{22}\boldsymbol{T}_{n_c} \end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{T}_{n_c}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{T}_{n_c} = [\boldsymbol{T}_1 \quad \boldsymbol{t}]$,其中 s 和 $t \in R^{n_c}$,则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{J}_{12}\boldsymbol{T}_{n_c} \\ \boldsymbol{T}_{n_c}^{-1}\boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{T}_{n_c}^{-1}\boldsymbol{J}_{22}\boldsymbol{T}_{n_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{J}_{12}\boldsymbol{T}_1 & \boldsymbol{J}_{12}\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{22}\boldsymbol{T}_1 & \boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{22}\boldsymbol{t}_1 \\ \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{22}\boldsymbol{T}_1 & \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{22}\boldsymbol{t}_1 \end{bmatrix}$$

因此问题变成了寻找 $\boldsymbol{T}_{n_c}$,使得

$$f(\boldsymbol{T}_{n_c}) = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boldsymbol{J}_{12}\boldsymbol{t} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{22}\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{22}\boldsymbol{T}_1 & \boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{22}\boldsymbol{t} \end{bmatrix} \right\|_{\mathrm{F}} \tag{12.30}$$

最小。

计算这样一个 F- 范是相当复杂的,因此如何简化地求得是未来的一个研究问题。

参考文献

1 Zames G. Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference, Transformations, Multiplicative Seminorms, and Aroximate Inverses. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol AC-26, No 2, 1981

2 Doyle J C. Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties. IEE Proceedings. Part D. 1982, 129(6): 242~250

3 Notker Amann, Frank Allgower. μ-suboptimal Design of a Robustly Performing Controller for a Chemical Reactor. Int J Control, 1994, Vol 59, No 3: 665－687

4 Special Issue on Linear Multivariable Control Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol AC-26, 1981, 621~623

5 Desoer C A, Vidyasagar M. Feedback Systems: Input-Output Properties. Academic Press, New York, 1975

6 Zames G. On the Input-Output Stability of Nonlinear Time-varing Feedback Systems, parts I and II. IEEE Trans Aut Control, 1966, Vol 11: 228~238, 465~476

7 Willems J L. 1971b, The Anslysis of Feedback Systems. MIT Press, Cambridge, MA

8 Safonov M G. Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems. MIT Press, Boston, 1980

9 Barmish B, Khargonekar P, Shi Z and Tempo R. Robustness Margin Need Not be a Continuous Function of the Problem data. Systems and Control Letters. 15, 91~98, 1989

10 Packard A, Zhou K, Pandey P, Leonhardsen J and Balas G. Optimal I/O Similarity Scaling for Full-information and State-feedback Problems. Systems and Control Letters, 19, 271~280, 1991

11 Rohn J. and Poljak S. Radius of Nonsingularity. Mathematics of Control, Signals and Systems, 1993

12 Ruan Hongning, Shi Zhongke. Hierarchical Aroach and its Alication to Integrated flight/Propulsion Control System. Chinese Journal of Aeronautics, Vol 9, No 4, 1996, 284~288

13 Dolye J C, Chu C C. Matrix Interpolation and H_∞-performance Bounds. IN 1985American Control Conference, Boston, Mass. 129~134

14 Lin J L, Postlethwaite I, Gu D W. μ-K-iteration: A new Algorithm for μ-synthesis.

Automaticas, 29(1), 1993, 219～224

15 Fan M, Tits A and Dolye J. Robustness in the Presence of Joint Parametric Uncertainty and Unmodeled Dynamics. IEEE Trans Aut Control, 1991, 36,25～38

16 Young P M, Dolye J C. Computation of μ with Real and Complex Uncertainties. Proc,of the 29th IEEE Conf. on Decision and Control, 1990, 1230－1235

17 Dale F Enns. Rocket Stabilization as a Structured Singular Value Synthesis Design Example. IEEE Control Systems, June 1991, 67～73

18 Steinbuch M, Terlouw J C, Bosgra O H, Smit S G. Uncertainty Modelling and Structured Singular-value Computation Alied to an Electromechanical System. IEE Proceedings-D, Vol 139, No 3, May 1992, 301～307

19 Eicher Low, William L Garrard. Robustness of a Helicopter Flight Control System Design Using Eigenstructure Assignment. AIAA-92-4469, 1992,786～803

20 Morari M,Zafirou E. Robust Process Control (Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall). 1989

21 Lars Pernebo,Leonard M Silverman. Model Reduction via Balanced State Space Representations. IEEE Transaction on Automatic Control, Vol Ac-27, No 2, April 1982, 382～387

22 史忠科.神经网络控制理论.西安:西北工业大学出版社,1997

23 Andy Packard, John Doyle,Gary Balas. Linear, Multivariable Robust Control with a μ Perspective. Transactions of ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol 115, June 1993

24 解学书,钟宜生 编著.H_∞控制理论. 北京:清华大学出版社, 1994,168～172

25 Packard A, Dolye J. The Complex Structured Singular Value. Automatica, Vol 29, No 1,71～109,1993

26 Harald Buschek, Anthony J Calise. Fixed Order Robust Control Design for Hypersonic Vehicles. AIAA-94-3662-cp,1994,1094～1103

27 Eiichi Ono, Kaoru Takanami, Norio Iwama, Yasutaka Hayashi, Yutaka Hirano, Yukiharu Satoh. Vehicle Integrated Control for Steering and Traction Systems by μ-synthesis. Automatica, Vol 30, No 11, 1639～1647,1994

28 Balas G J, Dolye J C, Glover K, Packard A , Smith R μ-Analysis and Synthesis Toolbox. Automatica, Vol 30, No 4, 733～735, 1994

29 James M Buffington, Andrew G Sparks, Siva S Banda. Robust Longitudinal AxisFlight Control for an Aircraft with Thrust Vectoring. Automatica, Vol 30, No 10:1527～1540, 1994

30 王礼全,施颂椒,张钟俊.结构不确定性多变量系统鲁棒控制.控制理论与应用, 1991,8(2): 119～126

31 黄琳,王龙,于年才. 系统鲁棒性的若干问题——背景、现状、与挑战. 控制理论与应用, 1991,8(1): 11~24

32 史忠科. 模型辨识新方法及其应用. 控制理论与应用,1995, 12(4)

33 Whidborne J F, Murad G, Gu D W, Postlethwaite I. Robust Control of an Unknown Plant—the IFAC 93 Benchmark. Int J Control, 1995, Vol 61, No 3, 589~640

34 Gunter Stein, John C Dolye. Beyond Singular Value and Loop Shapes. Journal of Guidance. Vol 14, No 1, JAN-FEB, 1991, 5~16

35 Kevin A Wise. Singular Value Robustness Tests for Missile Autopilot Uncertainties. Journal of Guidance. Vol 14, No 3, MAY-JUNE, 1991, 597~605

36 史忠科. 频率域鲁棒分析方法及其在飞控中的应用. 飞行力学,1997, 15(1):37~43

37 Kemin Zhou, Pramod P Khargonekar, Jakob Stoustrup, Hans Henrik Niemann. Robust Performance of Systems with Structured Uncertainties in State Space. Automatica, Vol 31, No 2, 249~255,1995

38 Wu Q H, Mansour M. A New Stability Robustness Test for Additively Perturbed Interconnected Systems. IFAC Large Scale Systems, Beijing, PRC, 1992, 205~210

39. Kwakernaak H. Robust Control and H_∞-Optimization-Tutorial Paper. Automatica, Vol 29, No 2, 255 ~273, 1993

40 陈禹六 编著. 大系统理论及其应用. 北京:清华大学出版社,1988

41 雷树梁 著. 动态大系统方法. 西安:西北工业大学出版社, 1994

42 张培强. Matlab 语言. 合肥:中国科技大学出版社,1995

43 Doyle J C, Wall J, Stein G. Performance and Robustness Analaysis for Structured Uncertainty. Proc, 21st IEEE Conf, Decision Contr, 1982, 629~636

44 史忠科等. 控制系统的分析和设计方法. 西安:西北工业大学出版社,1995

45 程鹏 编. 多变量线性控制系统. 北京:北京航空航天大学出版社,1990

46 史忠科. 模型在线辨识方法及其应用. 控制理论与应用,1995, 12(6)

47 史忠科等. 大型计算机监控系统. 北京:科学出版社,1995

48 Lite L. Order Reduction of Linear Statespace Models Via Optimal Aroximation of the Nondominant Modes. Large Scale Systems, Vol 2, 171~184, 1981

49 王翼,张朝池 编著. 大系统控制——方法和技术. 天津:天津大学出版社,1992

50 程云鹏 主编. 矩阵论. 西安:西北工业大学出版社,1989

51 曹志浩等. 矩阵计算和方程求根. 北京:人民教育出版社,1979

52 阮洪宁,史忠科. μ 理论在纵向飞行控制系统中的应用. 现代科技理论与应用论文集. 西安:西北工业大学出版社, 1996

53 Yousuff A, Skelton R E. A note on Balanced Controller Reduction. IEEE Trans, Auto, Contro, Vol AC-29, No 3, 254~257, 1984

54 Glover K. All Optimal Hankel-norm Aroximations of Linear Multivariable System and Their L^{∞}-error Bounds. Int Journal of Control, Vol 39, No 6, 1984, 1115～1193

55 Gawronski W, Juang J N. Model Reduction for Flexible Structures. Control and Dynamic Systems, Vol 36 Academic Press, New York, 1990

56 Yousuff A, Skelton R E. Cobariance Equivalent Realizations with Alication to Model Reduction of Large-scale Systems. Control and Dynamic Systems, Vol 22, 273～348, 1985

57 孙继广. 矩阵扰动分析. 北京:科学出版社,1987

58 Bruce C Moore. Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction. IEEE Transaction on Automatic Control, Vol Ac-26, No 1, February 1981, 17～31

59 申铁龙著. H_{∞}控制理论及应用. 北京:清华大学出版社出版,1996

60 吴方向,史忠科,杨建军,戴冠中. 一类非线性时滞系统的鲁棒观测器设计. 98'控制与决策年会论文集,张家界,1998

61 J. Chen D Xu,Shafai B, On Sufficient Conditions for Stability Independent of Delay, IEEE Trans Auto Contr. Vol 40, 1675～1680,1995

62 Chen J,Lachman H A. Frequency Sweeping Tests for Stability Independent of Delay, IEEE Trans Auto Contr. Vol 40, 1640～1645, 1995

63 吴方向,史忠科,戴冠中. 时滞区间系统的 H_{∞}鲁棒镇定及其在飞控系统中的应用. 西北工业大学学报, 1999,17(2)

64 杨克勤,包学游. 矩阵分析. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社出版,1988

65 Balas S. A necessary and Sufficient Condition for Stability of Inteval Matrices, Int J Control, Vol 37, 717～722, 1983

66 Zhou C S,Deng J L. The stability of the Grey Linear System, Int J Control, Vol 43, 313～320, 1986

67 Soh C B. Robust Stability of Dynamic Interval Matrices, Control Theory and Advanced Thechnology, Vol 10, 73～80, 1994

68 毛维杰,孙优贤. 区间矩阵的鲁棒稳定性判据. 控制与决策,1997,12: 264～268

69 吴方向,史忠科,戴冠中. 区间系统的 H_{∞}鲁棒控制. 自动化学报, 1999, 25(2)

70 吴方向. 不确定性系统的鲁棒稳定性分析与控制设计方法研究. 西北工业大学博士论文,西安,1998

71 Keith Glover, John Doyle. A State-Space Aroach to H_{∞} Optimal Control. AD-A240221

72 Bruce A, Francis, John C Doyle. Linear Control Theory with an H_{∞} Optimality Criterion. SIAM J Control and Optimization, Vol 25, No 4, July 1987

73 叶庆凯,王肇明. 优化与最优控制中的计算方法. 北京:科学出版社,1986

内容简介

通常,系统的分析方法和控制器的设计大多是基于数学模型而建立的,而且,各类方法已经趋于成熟和完善。然而,系统总是存在这样或那样的不确定性。在系统建模时,有时只考虑了工作点附近的情况,造成了数学模型的人为简化;另一方面,执行部件与控制元件存在制造容差,系统运行过程也存在老化、磨损以及环境和运行条件恶化等现象,使得大多数系统存在结构或者参数的不确定性。这样,用精确数学模型对系统的分析结果或设计出来的控制器常常不满足工程要求。近些年来,人们展开了对不确定系统鲁棒控制问题的研究,并取得了一系列研究成果。H_∞鲁棒控制理论和 μ 分析理论则是当前控制工程中最活跃的研究领域之一,多年来一直备受控制研究工作者的青睐。作者通过系统地研究线性不确定系统、时间滞后系统、区间系统、离散时间系统的鲁棒稳定性问题,提出了有关系统鲁棒稳定性的分析和设计方法。为此,本书对国内外及本书作者的研究成果给予系统地总结。全书共分为 12 章。第 1 章概述了鲁棒控制的有关概念,对多变量控制系统的鲁棒性分析作了较深入的介绍;第 2 章主要讨论了基本 H_∞优化理论,且从方法描述到优化算法都作了简要的阐述;第 3 章主要是从离散时间系统出发,进一步介绍了 H_∞理论的相关研究内容;第 4 章分别介绍了递阶控制算法、H_∞递阶优化和分散 H_∞控制;第 5 章介绍了 H_∞优化方法的性质及其实现问题,并附了代数 Riccati 方程的算法流程图;

第6章讨论了 H_∞优化算法在飞行控制中的应用问题，给出了飞机的运动方程及其简化和相关仿真计算；第7章针对时滞系统的鲁棒控制问题作了论述和研究；第8章介绍了区间系统的鲁棒控制，给出了有关结果；第9章介绍了 μ 理论的基本概念；第10章介绍了 μ 分析和 μ 综合；第11章讨论了纵向飞行控制系统 μ 综合方法，并比较了 H_∞控制器和 μ 控制器；第12章介绍了 μ 控制器的平衡降阶方法，且对 μ 理论方法进行了总结和展望。

本书比较适合飞行器控制设计研究者和控制理论及应用研究工作者参考、阅读；对那些对控制领域感兴趣的学生或其他人员也有一定的学习、参考价值。

In general, the analysis method to systems and the design to controllers are almost based on mathematical models, and all kinds of approaches are nearly perfect and mature. Nevertheless, the some uncertainty of systems does exist. On one hand, the mathematical models are simplified artificially for taking only the case near action spot into account, on the other hand, the structure uncertainty or parameter uncertainty exist in almost systems for the tolerance between execution unit and control unit, the ageing, abrade, deterioration of operating, etc. for these reasons, the controller and analysis outcome of systems with precise mathematical models are always dissatisfied with the project requirement. In the past years, many researches have been explored to the robust control problem of uncertain systems, which resulted in series achievement. H_∞ robust control and μ synthesis theory is one of the popular areas in the field of control engineering. In the

past few years, more attention has been paid to them. The robust stabilization of linear uncertain, time-delay, internal and hierarchical system have been explored here, furthermore, author brings some synthesis and design method about the robust stabilization forward. Twelve chapters are developed in this book. Some concepts related to robust control are stated in chapter 1, and the robust of multivariable control system is explored here. Chapter 2 presents the basic H_∞ optimal theory. In chapter 3, the H_∞ theory of a discrete-time system is explored. Chapter 4 is about of hierarchical/discrete H_∞ optimization method. An illustration of the qualities and realization of H_∞ optimization method is given in chapter 5. Chapter 6 presents application of H_∞ optimization method to flight control system, and gives related emulate computation. The robust control of time-delay plants and that of interval system are discussed in chapter 7 and chapter 8 respectively. Chapter 9 introduces basic concepts of μ theory. Chapter 10 develops the analysis and the synthesis of μ theory. In chapter 11, the design methods of μ theory for longitudinal flight control system. Chapter 12 shows equilibrium reduced-order method and prospect of μ controller.

In some extent, this book is an appropriate one for those research control system design to flights or be engaged with the research and application of control theory. Furthermore, it is useful to people who is interesting in control field.